MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

9. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

5456-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

V. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

9. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

66 F3278

QA1
M88
v. 9-11

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Bach, R., Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs 110

Bieberbach, L., Bemerkung zu meinem Beweis des Drehungssatzes für schlichte und konforme Abbildungen. (Erwiderung auf die Note des Herrn Koebe in der Math. Zeitschrift, 6, 1920, S. 311—313) 161

Blaschke, W., Über affine Geometrie. XXIX: Die Starrheit der Eiflächen . . 142

Carleman, T., Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$ 35

Carleman, T., Zur Theorie der Minimalflächen 154

Carleman, T., Zur Theorie der linearen Integralgleichungen 196

Carlson, F., Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten 1

Hahn, H., Über die stetigen Kurven der Ebene 66

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood, Some problems of „Partitio numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates 14

Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen. I. 74

Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen. II. 280

Jolles, St., Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen 271

Kürschák, J., Ein Irreduzibilitätssatz in der Theorie der symmetrischen Matrizen 191

Ostrowski, A., Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems 28

Ramanujan†, S., Congruence properties of partitions 147

Rothe, R., Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung 300

Salkowski, E., Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene und auf der Kugel 136

Szegő, G., Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen . 163

Szegő, G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen 167

Szegő, G., Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören 218

Torhorst, M., Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete 44

Zwei philosophische Preisaufgaben 326

Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

Der bekannte Eisensteinsche[1]) Satz über die Potenzreihenentwicklung einer algebraischen Funktion dürfte das erste allgemeinere Beispiel sein von dem Zusammenhange zwischen den arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten und der analytischen Natur der durch die Reihe definierten Funktion. Ein Komplement zu diesem Satze wurde von Herrn Fatou[2]) geliefert, indem er zeigte, daß eine Potenzreihe in x mit ganzzahligen Koeffizienten nur dann eine algebraische und nicht rationale Funktion darstellen kann, wenn diese innerhalb des Einheitskreises $|x| < 1$ einen Windungspunkt besitzt. Daß der dem Nullpunkte am nächsten liegende Windungspunkt übrigens beliebig nahe an den Einheitskreis rücken kann, zeigt die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{mn},$$

wo die ganze positive Zahl m beliebig gewählt werden kann. Demnach läßt der Fatousche Satz keine Verschärfung in der Richtung zu, daß der Einheitskreis durch einen kleineren Kreis ersetzt werden könnte. Dagegen könnte man die Bedingung weglassen, daß die Funktion algebraisch sein soll, und überhaupt diejenigen nicht rationalen Funktionen betrachten, die innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten aufweisen.

---

[1]) Eisenstein, Monatshefte d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Juli 1852, S. 441. — Heine, Crelles Journal, **45** (1853), S. 285–302; Crelles Journal, **48** (1854), S. 267–275; Handbuch d. Kugelfunktionen, **I** (1878), S. 50–53. — Hermite, London Math. Society, Proceedings, **VII** (1876), S. 173–175; Cours (lithographié) de la Faculté des Sciences de Paris, rédigé par M. Andoyer (Paris 1891), S. 195–196.

[2]) Fatou, Sur les séries entières à coefficients entiers, C. R. Paris, **138** (1904, 1), S. 342–344.

Wenn man, um sich über diese Frage zu orientieren, diejenigen derartigen Funktionen aufsucht, deren Verhalten für $|x| \leqq 1$ schon bekannt ist, so zeigt sich, daß sie entweder innerhalb des Einheitskreises einen Verzweigungspunkt haben, oder auch daß sie über diesen Kreis hinaus nicht fortgesetzt werden können[3]). Herr Fatou hebt die im Einheitskreise konvergenten Potenzreihen hervor, denen man in der Theorie der elliptischen Funktionen und in Anwendungen der Analysis auf die Zahlentheorie begegnet. Mit diesen Reihen verhält es sich so, daß sie entweder über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar sind, oder auch ist ihr Verhalten auf diesem Kreise bisher unbekannt[4]). Durch die Bemerkungen des Herrn Fatou ist, wie auch von Herrn Pólya[5]) hervorgehoben wurde, die Frage nahegelegt, ob es wirklich derartige fortsetzbare Reihen gibt, die nicht rationale Funktionen darstellen. Ein Beitrag zur Beantwortung dieser Frage wurde neulich von Herrn Hausdorff[6]) geliefert, indem er zeigte, daß es nur abzählbar viele im Einheitskreise konvergente Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, die über di ɜen Kreis hinaus fortgesetzt werden können.

Nach dem, was oben angeführt wurde, würde es nicht unbegründet sein, die Frage zu stellen, ob die durch eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellten nicht rationalen Funktionen, die innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten besitzen, entweder einen

---

[3]) In der unter [5]) angeführten Arbeit von Herrn Pólya wird man S. 509–510 einige Beispiele notiert finden.

[4]) Es hat ja keine Schwierigkeiten, Beispiele der letzteren Kategorie anzugeben. Denn zwar sind Bedingungen dafür aufgestellt worden, daß der Konvergenzkreis eine singuläre Linie sei, aber diese Bedingungen lassen sich nur in ganz speziellen Fällen anwenden, und im allgemeinen wird es dann belanglos sein, ob die Koeffizienten ganze Zahlen sind oder nicht.

Herr Fatou erwähnt (l. c.) die Reihe (p durchläuft die Primzahlen)

$$x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + \ldots = \sum_p x^p.$$

Mit Hilfe zahlentheoretischer Betrachtungen hat Herr Fatou bewiesen, daß diese Reihe über den Konvergenzkreis nicht fortgesetzt werden kann. Hierzu möchte ich bemerken, daß diese Tatsache im Grunde genommen nichts damit zu tun hat, daß die Koeffizienten ganze Zahlen sind. Denn dasselbe gilt für jede Reihe

$$\sum_p a_p x^p,$$

wie auch die Koeffizienten a_p gewählt sind. In der Tat, die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten, deren Indizes $\leqq n$ sind, ist immer $\leqq \pi(n)$ und also von der Form $n \cdot \varepsilon(n)$, wo $\lim \varepsilon(n) = 0$. Man hat dann nur den folgenden Satz anzuwenden:

Wenn, für jedes n, die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten einer Potenzreihe, deren Indizes $\leqq n$ sind, gleich $n \cdot \varepsilon(n)$ ist, so kann die Reihe über den Konvergenzkreis hinaus nicht fortgesetzt werden.

Verzweigungspunkt innerhalb dieses Kreises haben oder auch darüber hinaus nicht fortsetzbar sind.

Legt man der Betrachtung einen Kreis mit einem Halbmesser > 1 zugrunde, so ist die Frage schon durch die Untersuchungen der Herren Borel[7]) und Pólya[5]) beantwortet. Eine in einem solchen Kreise meromorphe Funktion, deren Entwicklung um $x = 0$ ganzzahlige Koeffizienten hat, muß eine rationale Funktion sein. Dieser von Herrn Borel bewiesene Satz wurde von Herrn Pólya dahin verallgemeinert, daß er noch gültig bleibt, wenn man voraussetzt, daß die Funktion im erwähnten Kreise eindeutig ist und dort nur endlich viele Singularitäten hat.

Ich werde nun im folgenden zeigen, daß die oben gestellte Frage bejahend zu beantworten ist, indem ich den Satz beweise:

Wenn die nicht rationale Funktion $f(x)$ innerhalb des Einheitskreises nur endlich viele Singularitäten hat und in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden kann, so muß die Funktion $f(x)$ entweder einen Verzweigungspunkt innerhalb des Einheitskreises haben, oder sie kann über diesen Kreis hinaus nicht fortgesetzt werden.

Nun hat Herr Fatou bewiesen[8]), daß jede rationale Funktion, die durch eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden kann, von der Form

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}$$

sein muß, wo $P(x)$ ein Polynom ist und p, q ganze Zahlen sind. Dem gemäß ergibt sich speziell für die im Einheitskreise regulären Reihen:

Die durch eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellte Funktion ist entweder eine rationale Funktion oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar. Im ersteren Falle muß sie die Form

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q}$$

haben.

---

[5]) Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ann., 77 (1916), S. 497–513.

[6]) Hausdorff, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen, diese Zeitschrift, 4 (1919), S. 98–103.

[7]) Borel, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, Bull. Sciences Math., 2e Série, XVIII (1894), S. 22–25.

[8]) S. [2]) oder auch Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., 30 (1906), S. 368–371.

§ 1.

Die Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine rationale Funktion darstellt, hat Herr Borel[4]) folgendermaßen formuliert. Wird

$$\Delta_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_p, & a_{p+1}, \ldots, a_{p+q-1} \\ a_{p+1}, & a_{p+2}, \ldots, a_{p+q} \\ \cdots & \cdots \\ a_{p+q-1}, & a_{p+q}, \ldots, a_{p+2q-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt, so ist es notwendig und hinreichend, daß es ein q gibt derart, daß

$$\Delta_p^{(q)} = 0 \quad \text{für} \quad p > p_0.$$

Dies tritt, wie man unter Anwendung der Relation

$$\Delta_p^{(q-1)} \Delta_{p+2}^{(q-1)} - \Delta_p^{q} \Delta_{p+2}^{(q-2)} = \left(\Delta_{p+1}^{(q-1)}\right)^2$$

findet[5]), u. a. dann ein, wenn

$$(2) \qquad \Delta_p^{(p)} = \Delta_p^{(p+1)} = 0 \quad \text{für} \quad p > p_0.$$

Wenn nun die a_n ganze Zahlen sind oder allgemeiner, wenn $a_n \varepsilon^n$, wo

$$|\varepsilon| = 1,$$

ganze Zahlen sind, so sind $|\Delta_p^{(q)}|$ nicht negative ganze rationale Zahlen, und aus den Ungleichungen

$$(3) \qquad |\Delta_p^{(p)}| < 1, \quad |\Delta_p^{(p+1)}| < 1 \quad \text{für} \quad p > p_0$$

folgen dann (2). Um nun zu (3) zu gelangen, werden in $\Delta_p^{(q)}$ gewisse Kolonnen durch lineare Kombinationen mit den vorhergehenden ersetzt, so daß ein Element a_n durch

$$b_n = a_n + \gamma_1 a_{n-1} + \gamma_2 a_{n-2} + \ldots + \gamma_\nu a_{n-\nu} \qquad (n - \nu \geqq p)$$

ersetzt wird. Man kann dies offenbar so deuten, daß bei der Bildung von $\Delta_p^{(q)}$ statt $f(x)$ die Reihe

$$P(x) f(x) = \sum b_n x^n$$

zugrunde gelegt wird. Daß dies Verfahren, das von Herrn Borel und dann auch von Herrn Pólya angewendet wurde, zum Ziele führt, hängt vollständig von der Wahl des Polynoms $P(x)$ ab. Es kommt darauf an, $P(x)$ so zu wählen, daß für b_n eine obere Schranke erhalten wird, die hinreichend klein ist, um zu den Ungleichungen (3) durch eine direkte Abschätzung der Determinanten zu führen. In dem von Herrn Borel betrachteten Falle kann ganz einfach

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{e_i}\right)^m$$

gesetzt werden, wenn $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ die Pole von $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ sind. Denn ist die positive ganze Zahl m genügend groß, so ist $P(x)f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, und dann erfüllen die b_n für hinreichend große n eine Ungleichung

$$|b_n| < \delta^n, \quad \delta < 1,$$

was genügt, um die Ungleichungen (3) zu sichern. In dem von Herrn Pólya betrachteten Falle kann zwar $P(x)$ nicht so gewählt werden, daß $P(x)f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär wird, d. h. man kann nicht mit einem *festen* $P(x)$ erreichen, daß die Ungleichungen $|b_n| < \delta^n$ mit einem $\delta < 1$ für *alle* hinreichend große n erfüllt werden. Dies ist auch nicht notwendig, denn es braucht $P(x)$ nur für die Elemente einer und derselben Kolonne fest zu sein, und deshalb wird es möglich, m in dem obigen Polynome so zu wählen, daß für die Elemente einer hinreichend großen Anzahl Kolonnen in $\Delta_p^{(p)}$ und $\Delta_p^{(p+1)}$ eine Ungleichung der angegebenen Art erhalten wird. In dem Falle aber, wo z. B. die Funktion $f(x)$ in $|x| < 1$ regulär angenommen wird, aber bezüglich ihres Verhaltens auf $|x| = 1$ nichts vorausgesetzt wird, muß die Wahl von $P(x)$ von anderen Gesichtspunkten aus getroffen werden. Man wird dann zur Aufsuchung der in § 2 mit $P_\delta(x)$ bezeichneten Polynome geführt.

Weil, wenn $a_n \varepsilon^n$ ganze Zahlen sind, die Gleichheiten (2) aus den Ungleichungen (3) folgen, so wird der behauptete Satz gleichzeitig mit dem folgenden bewiesen:

Wenn die Reihe (1) *eine innerhalb des Einheitskreises eindeutige Funktion darstellt, die dort nur endlich viele Singularitäten besitzt, und die noch in* $x = 0$ *und* $x = -1$ *regulär ist, so ist*

$$\text{(a)} \qquad \limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(q)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1$$

für $q = p,\ p+1$.

Die Aufgabe der folgenden Paragraphen ist daher, die Richtigkeit von (a) unter den angegebenen Voraussetzungen nachzuweisen.

§ 2.

Es sei $P(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade n

$$P(x) = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n, \quad n > 0$$

mit $P(0) = 1$. Betrachten wir dessen Werte auf dem Einheitskreise $|x| = 1$, so gibt es dort immer Stellen, wo $|P(x)| > 1$. Wird die Grad-

zahl n festgehalten, so hat die Summe derjenigen Bogen, wo $|P(x)|<1$, eine obere Grenze Θ_n. Es ist

$$\Theta_1 \leqq \Theta_2 \leqq \Theta_3 \leqq \dots,$$

so daß $\lim \Theta_n$ existiert. Sucht man den Wert von Θ_n für allgemeines n zu bestimmen, so liegt es nahe, die Kurve $|P(x)|=1$ zu betrachten und deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreise zu ermitteln. Für $n=1$ ist die Kurve $|P(x)|=1$ der Kreis

$$\left|\frac{1}{g_1}+x\right|=\frac{1}{|g_1|},$$

und weil dieser immer durch den Nullpunkt geht, schließt er vom Einheitskreise einen Bogen ein, der stets kleiner als π ist, aber beliebig nahe an π gebracht werden kann, wenn $|g_1|$ hinreichend klein gewählt wird. Es ist also $\Theta_1=\pi$. Für $n=2$ ist die Kurve $|P(x)|=1$ ein Cassinisches Oval, und es ergibt sich $\Theta_2=\frac{4\pi}{3}$. Für größere Werte von n werden die entsprechenden Betrachtungen kompliziert, und ich schlage daher einen anderen Weg ein, um zu zeigen, daß *die Θ_n-Folge den Grenzwert 2π hat.* Man soll also die Existenz von Polynomen $P(x)$ mit $P(0)=1$ beweisen, deren absolute Beträge <1 sind auf Bögen, deren Summe beliebig wenig von 2π abweicht. Für die Anwendungen im folgenden ist der Grad von $P(x)$ belanglos; dagegen ist es von wesentlicher Bedeutung, daß $P(x)$ so gewählt werden kann, daß die fraglichen Bögen zusammenhängen. Ich werde also zeigen:

$\delta>0$ sei beliebig. Dann gibt es ein Polynom $P_\delta(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$P_\delta(0)=1$$

$$|P_\delta(e^{i\varphi})|<1 \quad \text{für} \quad -\pi+\delta \leqq \varphi \leqq \pi-\delta. \tag{4}$$

Beweis: Es ist

$$|1+2x|=2\left|\frac{1}{2}+x\right|>1$$

in jedem Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme von $x=-1$, und also, wenn

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+2x}$$

gesetzt wird, $|\varphi(x)|<1$ auf dem ganzen Einheitskreise $|x|=1$ mit Ausnahme von $x=-1$. Übrigens können wir

$$|\varphi(x)| \leqq 1-\sigma, \quad \sigma>0$$

für

$$x=e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leqq \pi- \tag{5}$$

schreiben, wenn

$$\left|\frac{1}{1-2e^{i\delta}}\right| = 1-\sigma$$

gesetzt wird. Schneiden wir die x-Ebene längs der negativen reellen Achse von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ auf, so läßt sich $\varphi(x)$ in eine Reihe von Polynomen entwickeln,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x),$$

die gleichmäßig konvergiert in jedem endlichen Bereiche, dessen Begrenzung keinen Punkt vom Rande des soeben konstruierten „Sternes" enthält. Es sei G ein solches Gebiet, das $x=0$ und den Bogen (5) im Innern enthält. Dann können wir, für jedes $\varepsilon > 0$, N so wählen, daß

$$|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle Punkte von G. Nehmen wir

$$0 < \varepsilon < \sigma$$

an und schreiben

$$\sum_{n=0}^{N} p_n(x) = R(x),$$

$$P_\delta(x) = R(x) - R(0) + 1,$$

so ist $P_\delta(0) = 1$ und, für alle Punkte vom Bogen (5),

$$\begin{aligned} |P_\delta(x)| &\leqq |R(x)| + |R(0) - 1| \\ &< 1 - \sigma + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \sigma + \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

$P_\delta(x)$ hat also die in (4) verlangten Eigenschaften.

Dem betrachteten Polynome kann noch die Bedingung auferlegt werden, in vorgegebenen Punkten zu verschwinden. Denn sind

$$x = e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

diese Punkte, die selbstverständlich alle von 0 verschieden sind, so bilde man das Polynom

$$Q_\delta(x) = (P_\delta(x))^q \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{e_k}\right).$$

Es sei m das Maximum von $|P_\delta(x)|$ auf dem Bogen (5), M das Maximum von

$$\prod_{k=1}^{\nu} \left|1 - \frac{x}{e_k}\right|$$

auf demselben Bogen. Weil $m < 1$, so kann die rationale ganze Zahl g so groß gewählt werden, daß

$$m^g M < 1$$

und daß folglich

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

auf dem Bogen (5). Offenbar ist $Q_\delta(0) = 1$.

Es sei $Q_\delta(x)$ ein derartiges Polynom, das fest bleibt. Dann lassen sich r_0, R_0

$$r_0 < 1, \quad R_0 > 1$$

so bestimmen, daß

$$|Q_\delta(x)| < 1$$

im Gebiete

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad r_0 \leqq \varrho \leqq R_0, \quad |\varphi| \leqq \pi - \delta.$$

Das Maximum von $|Q_\delta(x)|$ in diesem Gebiete sei $\mu_2(r_0, R_0)$, so daß also

$$\mu_2(r, R) < 1$$

für $r_0 \leqq r \leqq R \leqq R_0$. Das Maximum von $|Q_\delta(x)|$ auf dem Bogen

$$x = Re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

sei $\mu_1(R)$; dann ist

$$\mu_1(R) > 1$$

für $1 \leqq R \leqq R_0$, und die Größe

$$\alpha_0(R) = \frac{\log R}{\log \mu_1(R)} \tag{6}$$

ist folglich > 0 für $1 < R \leqq R_0$ und

$$\lim_{R=1} \alpha_0(R) = 0. \tag{7}$$

Wir beweisen folgendes, was wir mit (A) bezeichnen wollen:

(A) *Zu jedem R im Intervalle*

$$1 < R \leqq R_0 \tag{8}$$

läßt sich ein α im Intervalle

$$0 < \alpha < \alpha_0 \tag{9}$$

und ein r im Intervalle

$$r_0 \leqq r < 1 \tag{10}$$

so bestimmen, daß

$$\mu_2(r, R) < \left(\frac{r^3}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu_1(R). \tag{11}$$

In der Tat, wird $\alpha < \alpha_0$, aber hinreichend nahe an α_0 gewählt, so kann

$$\frac{\mu_1(R)}{R^{1/\alpha}}$$

beliebig nahe an 1 gebracht werden und kann speziell $> \mu_2(r_0, R_0)$ gemacht werden. Es läßt sich dann ein $r < 1$ bestimmen derart, daß die rechte Seite von (11) auch $> \mu_2(r_0, R_0)$ wird. Für dies r ist (11) sicher erfüllt. Die Größe

$$h = \frac{\mu_1(R)^\alpha}{R} \tag{12}$$

ist immer < 1, wenn R und α in (8) bzw. (9) liegen.

§ 3.

Von der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

wird vorausgesetzt: Sie stellt eine im Einheitskreise eindeutige Funktion dar, die dort die einzigen Singularitäten

$$x = e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

$$0 < |e_1| \leqq |e_2| \leqq \ldots \leqq |e_\nu| < 1$$

hat, und die noch im Punkte $x = -1$ regulär ist. Zunächst ergibt sich hieraus, daß die Reihe für $|x| < |e_1|$ konvergiert, so daß die Ungleichung

$$|a_n| < \left|\frac{2}{e_1}\right|^n \tag{13}$$

für hinreichend großes n gilt, ferner, daß die Zahlen R^*, δ

$$R^* > 1, \quad \delta > 0$$

so bestimmt werden können, daß $f(x)$ im Bereiche

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad 1 \leqq \varrho \leqq R^*, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

regulär ist[9]). Mit den hier eingeführten e_k und δ wird nun ein Polynom $Q_\delta(x)$ gebildet. Es sei l der Grad von $Q_\delta(x)$. Dann werden die in § 2 betrachteten Größen R_0, r_0 so gewählt, daß

$$1 < R_0 \leqq R^*, \quad |e_\nu| < r_0 < 1$$

$$4l\alpha_0(R) < 1 \quad \text{für} \quad 1 < R \leqq R_0 \tag{14}$$

und daß die in § 2 diesen Zahlen auferlegten Bedingungen erfüllt sind. Dies ist möglich. Wird der Bogen

$$x = Re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \pi - \delta$$

[9]) Die Argumente sind stets im Intervalle $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ zu wählen.

mit S, derjenige Weg, der vom Bogen

$$\omega = re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leqq \pi - \delta$$

und von den geradlinigen Stücken

$$x = \varrho e^{\pm i(\pi-\delta)}, \quad r \leqq \varrho \leqq R$$

gebildet ist, mit T bezeichnet, so ist für alle R, α, r, die nach (A) gewählt sind, $f(x)$ auf $S+T$ regulär und gleichzeitig (11) erfüllt.

Diese Bestimmung der Größen R, α, r wird im folgenden festgehalten.

Es sei nun C das Maximum von

$$\left|\frac{Q_\delta(x)}{x-e_k}\right| \qquad (k=1, 2, \ldots, \nu)$$

im Einheitskreise, e_0 der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten e_k. Dann wird die positive Größe η so gewählt, daß

$$\eta < \frac{e_0}{2}, \quad \eta < \frac{|e_1|}{2}, \quad \eta < r_0 - |e_\nu|,$$

$$\eta < \frac{\mu_1(R)}{2C}\left|\frac{e_1^3}{8R}\right|^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Um e_k als Mittelpunkt legen wir einen Kreis c_k mit dem Halbmesser η und bezeichnen mit M das Maximum von $f(x)$ auf $S+T$, mit K das Maximum von $|f(x)|$ auf $c_1 + c_2 + \ldots + c_\nu$. Dann können wir schreiben

$$(Q_\delta(x))^m f(x) = \sum_0^\infty b_n^{(m)} x^n,$$

$$(Q_\delta(x))^m = 1 + \gamma_1^{(m)} x + \gamma_2^{(m)} x^2 + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} x^{ml},$$

$$b_n^{(m)} = a_n + \gamma_1^{(m)} a_{n-1} + \gamma_2^{(m)} a_{n-2} + \ldots + \gamma_{ml}^{(m)} a_{n-ml},$$

$$b_n^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_S + \frac{1}{2\pi i}\int_T + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\nu}\int_{c_k} f(x)(Q_\delta(x))^m \frac{dx}{x^{n+1}},$$

wenn m eine positive ganze rationale Zahl ist und $a_n = 0$ für $n < 0$ gesetzt wird, und erhalten

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_S f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < M \cdot \frac{\mu_1(R)^m}{R^n},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_T f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < 2M \cdot \frac{\mu_2(r, R)^m}{r^n}\ ^{10}),$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} f(Q_\delta)^m \frac{dx}{x^{n+1}}\right| < K \cdot \frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n}.$$

[10]) Man kann annehmen, daß $R_0 < 2r_0$ ist.

Von jetzt ab wird

$$m = [\alpha s] + 1, \quad s \leqq n \leqq 3s, \tag{16}$$

wo s eine gewisse ganze Zahl ist, angenommen. Dann ist

$$M \cdot \frac{\mu_1^m}{R^n} < M\,\mu_1 \cdot \frac{\mu_1^{\alpha s}}{R^s} = M\,\mu_1 \cdot h^s.$$

Nach (11) ist

$$M \cdot \frac{\mu_2^m}{r^n} < M \cdot \frac{\mu_2^{\alpha s}}{r^{3s}} = M\left(\frac{\mu_2^\alpha}{r^3}\right)^s < M\,h^s.$$

Weil, nach (15),

$$K\frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < K \cdot \frac{C^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^{3s}} \cdot \frac{\mu_1^m \left|\frac{e_1}{2}\right|^{\frac{3m}{\alpha}}}{2^m C^m R^{\frac{m}{\alpha}}}$$

$$< \frac{K\mu_1}{2^m} \cdot h^s,$$

so gilt die Ungleichung

$$\nu \cdot K\frac{C^m \eta^m}{\left|\frac{e_1}{2}\right|^n} < M\,\mu_1 h^s$$

sicher für hinreichend großes m, also für $m > m^{(0)}$. Wir können folglich behaupten:

(B) *Wenn R, α, r wie in* (A) *stipuliert ist und $m > m^{(0)}$ gewählt sind, so gilt für alle m, n, die* (16) *erfüllen, die Ungleichung*

$$|b_n^{(m)}| < N\left(\frac{\mu_1(R)^\alpha}{R}\right)^s = N h^s \qquad (N = 4M\,\mu_1(R)). \tag{17}$$

§ 4.

Mit den Koeffizienten a_n der in § 3 betrachteten Potenzreihe wird die Determinante $\Delta_p^{(p)}$ gebildet,

$$\Delta_p^{(p)} = \begin{vmatrix} a_p, & a_{p+1}, & \cdots & a_{2p-1} \\ a_{p+1}, & a_{p+2}, & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{2p-1}, & a_{2p}, & \cdots & a_{3p-2} \end{vmatrix}$$

Weil $\gamma_0^{(m)} = 1$ ist, können wir die Elemente a_n einer Kolonne in $\Delta_p^{(p)}$ durch $b_n^{(m)}$ ersetzen. Es muß nur dabei m denselben Wert haben für alle Elemente der betrachteten Kolonne, und ferner muß

$$n - ml \geqq p \tag{18}$$

sein, wenn a_n das Element in der ersten Zeile ist. Wir führen diese Substitution in folgender Weise aus. Wird

$$\varkappa = \frac{\alpha l}{1-\alpha l} \tag{19}$$

gesetzt, so ist wegen (14)

$$0 < \varkappa < 1,$$

und

$$q = \left[\varkappa p + \frac{\varkappa}{\alpha}\right] + 1 \tag{20}$$

ist sicher $< p$, wenn p genügend groß ist. Die ganze Zahl s, die in (16) eingeführt wurde, wird dann aus

$$s = p + q \tag{21}$$

bestimmt. Betrachten wir die Elemente a_n, die in den $p - q$ letzten Kolonnen von $\Delta_p^{(p)}$ auftreten, so ist immer für diese

$$s \leqq n < 3s,$$

und wenn speziell a_n das Element in der ersten Zeile und der $(q+1)$-ten Kolonne ist, so hat n den Wert $p+q$, so daß

$$\begin{aligned} n - ml &= p + q - l(\alpha[p+q]+1) \\ &> p + q - l\alpha(p+q) - l \\ &= p + q(1-\alpha l) - p\alpha l - l \\ &> p. \end{aligned}$$

Für die Elemente a_n der $(p-q)$ letzten Kolonnen sind also die Bedingungen (16) und (18) erfüllt, und sie können mithin durch $b_n^{(m)}$ ersetzt werden. Nach (B) ist dann auch die Ungleichung (17) erfüllt.

Die Größe R ist aber im Intervalle $1 < R \leqq R_0$ beliebig, und es steht uns somit frei, R verschiedene Werte zuzuteilen. Wir wollen diese mit $R_1, R_2, \ldots$ und die entsprechenden Größen $\alpha, \varkappa, q, s$ usw. in übereinstimmender Weise bezeichnen. Zuerst wird ein R_1 gewählt, und $b_n^{(m)}$ in den $(p - q_1)$ letzten Kolonnen, wie soeben festgelegt wurde, eingeführt. Die $b_n^{(m)}$ dieser Kolonnen genügen für $m > m_1^{(0)}$

$$|b_n^{(m)}| < N_1 h_1^{p+q_1}. \tag{22}$$

Wird

$$d = \left|\frac{2}{e_1}\right| \tag{23}$$

gesetzt, so kann nach (19) ein β so bestimmt werden, daß

$$d^{(2+\varkappa)\varkappa} h_1^{1-\varkappa_1^2} < 1$$

wird für $0 < \alpha \leqq \beta$. Nach (7) ist es dann möglich, ein R_2 so zu wählen, daß

$$1 < R_2 \leqq R_0, \qquad \alpha_0(R_2) \leqq \beta,$$

so daß also

$$d^{(2+\varkappa_2)\varkappa_2} h_1^{1-\varkappa_1^2} < 1. \tag{24}$$

Indem m und q immer nach (16), (20) und (21) bestimmt werden, führen wir mit $\alpha = \alpha_2$ die Größen $b_n^{(m)}$ in die Kolonnen mit den Ordnungsnummern λ

$$q_2 < \lambda \leqq q_1$$

ein. Für diese $b_n^{(m)}$ gilt immer (17), so daß

$$|b_n^{(m)}| < N_2 h_2^{p+q_2}$$

oder, was für unsern Zweck hinreicht,

$$|b_n^{(m)}| < N_2 \qquad (m > m_2^{(0)}). \tag{25}$$

Die Elemente a_n der q_2 ersten Kolonnen lassen wir stehen. Sie genügen immer, wegen (23) und (13), für hinreichend große n

$$|a_n| < d^n,$$

also auch

$$|a_n| < d^{2p+q_2-2}. \tag{26}$$

Nun wird $\Delta_p^{(p)}$ entwickelt; man erhält $p!$ Glieder und für jedes Glied eine obere Schranke aus dem Produkte von $(p - q_1)$ Faktoren (22), $(q_1 - q_2)$ Faktoren (25) und q_2 Faktoren (26). Das liefert

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < d^{(2+\varkappa_2)\varkappa_2} h_1^{1-\varkappa_1^2},$$

also, nach (24),

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1.$$

In ähnlicher Weise wird

$$\limsup_{p=\infty} |\Delta_p^{(p+1)}|^{\frac{1}{p^2}} < 1$$

bewiesen. Damit ist die Richtigkeit von (a), S. 5, unter den dort angegebenen Voraussetzungen nachgewiesen.

(Eingegangen am 20. Oktober 1919.)

Some problems of „Partitio numerorum“: II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates.

By

G. H. Hardy in Oxford and J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Introduction.

1.1. This memoir is essentially a sequel to one which we published recently in the Göttinger Nachrichten[1]). It could not in any case be intelligible to a reader unacquainted with our earlier memoir; and we shall therefore quote formulae from the latter without further explanation.

In the memoir referred to we laid the foundations of our new method for the solution of Waring's Problem, carrying our analysis just so far as was necessary for the proof of Hilbert's Theorem, the fundamental existence theorem for the numbers $g(k)$ and $G(k)$. Here our object is to find the best possible inequality for the particular number $G(4)$. A good deal of our analysis, however, is valid for a general k, and will be useful to us when we proceed to the corresponding general problem. It will be found that the special interest of the case $k=4$ is quite sufficient to justify its consideration in a separate memoir.

1.2. It is known that

$$19 \leqq g(4) \leqq 37, \qquad 16 \leqq G(4) \leqq 37,$$

these inequalities, from left to right, being due to Waring, Wieferich, Kempner, and Wieferich respectively. For detailed references we may refer to the dissertations of Kempner[2]) and of Baer[3]). We need men-

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of 'Partitio numerorum'; I: A new solution of Waring's Problem, Göttinger Nachrichten 1920, S. 33–54. We shall refer to this memoir as W. P.

[2]) A. J. Kempner, Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1912.

[3]) W. S. Baer, Beiträge zum Waringschen Problem, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1913.

ion only that the deepest result, viz. $g(4) \leqq 37$, was obtained in 1909 by Vieferich, whose analysis is a refinement upon that by which Landau, n 1907, had proved that $g(4) \leqq 38$. Here we shall prove nothing con-erning $g(4)$; but we shall improve the upper bound for $G(4)$ very otably, by proving

Theorem A: $G(4) \leqq 21$.

2. A sharpening of our earlier analysis.

2.1. In § 9.2. of W. P. we proved that, assuming always

$$s \geqq 2K+1 = 2^k+1,$$

2.11) $$r_{k,s}(n) = Cn^{sa-1}S + O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon}) + O(n^{sa+a\varkappa-a-1+\varepsilon})$$
$$= \varrho_{k,s}(n) + O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon}) + O(n^{sa+a\varkappa-a-1+\varepsilon}),$$

here

$$S = \sum \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np).$$

t will be necessary now to replace the term $O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon})$ by a term of ower order[4]).

2.2. It will be found, on an examination of the analysis of W. P., hat the critical error term $O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon})$ arises in two places only. All ther errors are of lower order than that of the dominant factor n^{sa-1}, ither independently of the value of s, or at any rate when $s \geqq 2K+1$. he two critical errors arise as follows.

In the first place we have

$$S_2 = \sum \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{m}} \frac{(f(x))^s}{x^{n+1}} dx = O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon}),$$

here $\mathfrak{m}$ is a typical minor arc of the Farey dissection.

Secondly, when we consider the corresponding sum connected with he major arcs, we are confronted by a sum $\sum \sigma_{p,q}$, where

$$\sigma_{p,q} = \int_{\mathfrak{M}} \frac{|\Phi|^s}{|x|^{n+1}} |dx|$$

nd $\mathfrak{M}$ is a typical major arc of the dissection, and we write

$$\sum \sigma_{p,q} = O(n^{sa+\varkappa+\varepsilon})$$

It will be observed that these two errors arise in exactly the same ay. The upper bounds are obtained by substituting in the integrals the rude approximations, $f = O(n^{a+\varkappa+\varepsilon})$ on a minor arc and $\Phi = O(n^{a+\varkappa+\varepsilon})$

[4]) The formula (2.11) would lead only to $G(4) \leqq 33$, in itself a new result.

on a major arc. Here we refine on our previous argument by the use of a single new idea. This idea consists in an appropriate use of a known result, viz. that the number of positive integral solutions of the equation $x^k + y^k = n$ is $O(n^\varepsilon)$ for every $k > 1$ [5]), or, as we may express it in our notation,

$$r_{k,2}(n) = O(n^\varepsilon).$$

2.3. We have

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_{k,2}(\nu) = O\Big(\int\int_{|x|^k+|y|^k\leqq n} dx\,dy\Big) = O(n^{2a}).$$

Hence

$$\sum \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^4 |dx| \leqq \int_{\mathfrak{f}} |f(x)|^4 |dx| \leqq \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\Theta})|^4 d\theta$$

$$= O\Big(\sum (r_{k,2}(\nu))^2 R^{2\nu}\Big).$$

Now

$$\sum_0^n (r_{k,2}(\nu))^2 = O\Big(\sum_0^n r_{k,2}(\nu) \times \operatorname*{Max}_{\nu\leqq n} r_{k,2}(\nu)\Big) = O(n^{2a+\varepsilon});$$

and so, since $R = 1 - \frac{1}{n}$,

$$\sum \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^4 |dx| = O(n^{2a+\varepsilon}).$$

Hence

$$S_2 = O\Big(\sum \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^4 |f(x)|^{s-4} |dx|\Big)$$

$$= O\Big(n^{(s-4)a+\varepsilon} \sum \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^4 |dx|\Big) = O(n^{(s-4)a+2a+\varepsilon}).$$

Again, we have

$$\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^4 |dx| = \sum \int_{\mathfrak{M}} |f-\varphi|^4 |dx| = O\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}} |f|^4 |dx|\Big) + O\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}} |\varphi|^4 |dx|\Big)$$

$$= O(n^{2a+\varepsilon}) + O\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}} |\varphi|^4 |dx|\Big),$$

---

[5]) For a formal proof of this result see D. Cauer, Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1914, S. 38. For $k = 2$ (when the result includes *a fortiori* the corresponding results for 4, 6, ...) see E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttinger Nachrichten, 1912, S. 750.

$$\int_{\mathfrak{M}} |\varphi|^4 |dx| = O\Big(\sum_{q=1}^{n^a} \sum_{p} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Big|\frac{S_{p,q}}{q}\Big|^4 |\nu - i\theta|^{-4a} d\theta\Big)$$

$$= O\Big(\sum_{q} \sum_{p} q^{-4(1-\varkappa)+\varepsilon} \nu^{-4a} \theta_0\Big) = O\Big(\sum_{q} q \cdot q^{-4(1-\varkappa)+\varepsilon} \cdot n^{4a} \cdot q^{-1} n^{a-1}\Big)$$

$$= \begin{cases} O\Big(n^{5a-1+\varepsilon} \sum_{q} 1\Big) = O(n^{6a-1+\varepsilon}) = O(n^{2a+\varepsilon}) & (k \geqq 4) \\ O\Big(n^{5a-1} \sum_{q} q^{-1+\varepsilon}\Big) = O(n^{5a-1+\varepsilon}) = O(n^{2a+\varepsilon}) & (k = 3). \end{cases}$$

ius

$$\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^4 |dx| = O(n^{2a+\varepsilon}) \qquad (k > 2),$$

$$\sum \sigma_{p,q} = \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{|\Phi|^s}{|x|^{n+1}} |dx| = O\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^s |dx|\Big)$$

$$= O\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^{s-4} |\Phi|^4 |dx|\Big)$$

$$= O\Big(n^{(s-4)a\varkappa+\varepsilon} \sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^4 |dx|\Big) = O(n^{(s-4)a\varkappa+2a+\varepsilon}).$$

2.4. The argument of W. P. showed that

$$r_{k,s}(n) = C n^{sa-1} S + O(n^{\lambda}),$$

here $\lambda < sa - 1$ if $sa\varkappa < sa - 1$, i. e. if $s > kK = k 2^{k-1}$. It is now ear that this result holds if only

$$(s-4)a\varkappa + 2a < sa - 1,$$

e. if

$$s > (k-2)K + 4.$$

or $k = 4$ these inequalities reduce to $s > 32$ and $s > 20$ respectively, that the improvement is very substantial. And if only we can estab- h the existence of a positive constant σ such that

$$|S| > \sigma$$

hen $s \geqq 21$, we shall have proved not only Theorem A but the more ecise theorem

Theorem B: $r_{4,s}(n) \sim C n^{\frac{1}{4}s-1} S \qquad (s \geqq 21).$

The proof of this theorem is in fact reduced to a discussion of the gular series S.

3. Factorization of the singular series.

3.1. The discussion of the singular series is greatly simplified by the following fundamental lemma.

Lemma 1. *If*

$$A_q = \sum_p \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np),$$

so that

$$S = 1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots = \sum A_q$$

if $s \geqq 2K+1$, *and if* $(q, q') = 1$, *then*

$$A_{qq'} = A_q A_{q'};$$

and

$$S = \chi_2 \chi_3 \chi_5 \ldots = \Pi \chi_\pi,$$

where π *is prime*[6]) *and*

$$\chi_\pi = 1 + A_\pi + A_{\pi^2} + A_{\pi^3} + \ldots$$

We have

$$S_{pq'^{k-1},q} S_{pq^{k-1},q'} = \sum_h e\left(\frac{h^k pq'^{k-1}}{q}\right) \sum_{h'} e\left(\frac{h'^k pq^{k-1}}{q'}\right),$$

where h and h' describe complete systems of residues to moduli q and q'. But

$$e\left(\frac{h^k pq'^{k-1}}{q} + \frac{h'^k pq^{k-1}}{q'}\right) = e\left(\frac{\mathfrak{h}^k p}{qq'}\right),$$

where $\mathfrak{h} = hq' + h'q$; and, since $(q, q') = 1$, $\mathfrak{h}$ describes a complete system of residues to modulus qq'. Hence

$$S_{p,qq'} = S_{pq'^{k-1},q} S_{pq^{k-1},q'}. \tag{3.11}$$

Next we observe that, if p describes a complete system of residues *prime* to modulus q, and p' a similar system for modulus q', then $\mathfrak{p} = pq' + p'q$ describes a similar system for modulus qq'. Also

$$S_{pq'^{k-1},q} = \sum_h e\left(\frac{(pq' + p'q)\, q'^{k-1} h^k}{q}\right) = \sum_h e\left(\frac{p\,(q'h)^k}{q}\right) = \sum_h e\left(\frac{ph^k}{q}\right) = S_{p,q}.$$

Hence

$$\begin{aligned}(qq')^s A_q A_{q'} &= \sum_{p,p'} (S_{p,q})^s (S_{p',q'})^s e\left(-n\left(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\right)\right) \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} (S_{pq'^{k-1},q})^s (S_{pq^{k-1},q'})^s e\left(-\frac{n\mathfrak{p}}{qq'}\right) \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} (S_{\mathfrak{p},qq'})^s e_{qq'}(-n\mathfrak{p}) = (qq')^s A_{qq'};\end{aligned}$$

which proves the lemma.

---

[6]) The symbol π is used in this sense down to the end of 5.2, after which it is used in the ordinary sense.

4. Rules for the calculation of A_{π^ν}.

4.1. Lemma 1 is true for any value of k. The lemmas which follow e also true generally, provided only that k is not divisible by π. Thus nen $k=4$ they hold for $\pi>2$.

The sum A_{π^ν} involves the argument n, and we might write $_{\pi^\nu}=A_{\pi^\nu}(n)$. When, as will sometimes happen, n is replaced by nother argument, this argument will be shown explicitly.

Lemma 2. *If* $(\pi,k)=1$, $\alpha>0$, $0<\mu<k$, *then*

$$A_{\pi^{\alpha k+\mu}}=0$$

$$A_{\pi^{\alpha k+\mu}}=\pi^{\alpha(k-s)}A_{\pi^\mu}\left(\frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right),$$

cording as n is not or is a multiple of $\pi^{\alpha k}$.

(1) We have first

$$S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}}=\sum_h e\left(\frac{h^k p}{\pi^{\alpha k+\mu}}\right).$$

e write

$$h=\pi^{\alpha k+\mu-1}z+h' \qquad (0\leqq z<\pi,\ 0\leqq h'<\pi^{\alpha k+\mu-1}),$$

nd we obtain

$$S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}}=\sum_{h'}\sum_z e\left(\frac{ph'^k}{\pi^{\alpha k+\mu}}+\frac{kph'^{k-1}z}{\pi}\right).$$

he sum with respect to z vanishes unless h' is divisible by π, i. e. $h'=\pi h_1$, here $0\leqq h_1<\pi^{\alpha k+\mu-2}$; in this case the sum is π. Observing that this nge of variation of h_1 is, to modulus $\pi^{(\alpha-1)k+\mu}$, equivalent to π^{k-2} de- ıptions of the range $0\leqq h_1<\pi^{(\alpha-1)k+\mu}$, we obtain

$$S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}}=\pi\cdot\pi^{k-2}\sum_{h_1}e\left(\frac{ph_1^k}{\pi^{(\alpha-1)k+\mu}}\right)=\pi^{k-1}S_{p,\pi^{(\alpha-1)k+\mu}}.$$

It should be observed that the preceding argument is valid even when $=0$. We obtain in fact

. 11) $$S_{p,\pi^{\alpha k}}=\pi^{\alpha(k-1)} \qquad (\alpha>0)$$

nd otherwise

. 12) $$S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}}=\pi^{\alpha(k-1)}S_{p,\pi^\mu}.$$

(2) We have now

$$A_{\pi^{\alpha k+\mu}}=\sum_p\left(\frac{S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}}}{\pi^{\alpha k+\mu}}\right)^s e\left(-\frac{np}{\pi^{\alpha k+\mu}}\right).$$

We write

$$p = \pi^{\mu} z + p' \qquad (\mu > 0),$$

where $0 \leqq z < \pi^{\alpha k}$ and p' is less than π^{μ} and not divisible by π. We have then, by (4.12),

$$S_{p,\pi^{\alpha k+\mu}} = \pi^{\alpha(k-1)} S_{p,\pi^{\mu}} = \pi^{\alpha(k-1)} S_{p',\pi^{\mu}};$$

and

$$A_{\pi^{\alpha k+\mu}} = \pi^{-\alpha s} \sum_{p'} \sum_{z} \left(\frac{S_{p',\pi^{\mu}}}{\pi^{\mu}}\right)^{s} e\left(-\frac{nz}{\pi^{\alpha k}} - \frac{np'}{\pi^{\alpha k+\mu}}\right).$$

The sum with respect to z vanishes unless n is divisible by $\pi^{\alpha k}$. If however $n = \pi^{\alpha k}\nu$, where ν is an integer, we have

$$A_{\pi^{\alpha k+\mu}} = \pi^{\alpha(k-s)} \sum_{p'} \left(\frac{S_{p',\pi^{\mu}}}{\pi^{\mu}}\right)^{s} e\left(-\frac{\nu p'}{\pi^{\mu}}\right) = \pi^{\alpha(k-s)} A_{\pi^{\mu}}\left(\frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right).$$

4.2. Lemma 3. *If* $(\pi, k) = 1$, $\alpha > 0$,

$$A_{\pi^{\alpha k}} = 0 \qquad (n \not\equiv 0 \pmod{\pi^{\alpha k-1}}),$$
$$A_{\pi^{\alpha k}} = -\pi^{\alpha(k-s)-1} \qquad (n \equiv 0 \pmod{\pi^{\alpha k-1}},\ n \not\equiv 0 \pmod{\pi^{\alpha k}}),$$
$$A_{\pi^{\alpha k}} = (\pi - 1)\pi^{\alpha(k-s)-1} \qquad (n \equiv 0 \pmod{\pi^{\alpha k}}).$$

By (4.11), we have

$$S_{p,\pi^{\alpha k}} = \pi^{\alpha(k-1)}, \quad A_{\pi^{\alpha k}} = \pi^{-\alpha s} \sum_{p} e\left(-\frac{np}{\pi^{\alpha k}}\right).$$

Writing

$$p = \pi z + p' \quad (0 \leqq z < \pi^{\alpha k-1},\ 0 < p' < \pi),$$

we obtain

$$A_{\pi^{\alpha k}} = \pi^{-\alpha s} \sum_{p'} \sum_{z} e\left(-\frac{nz}{\pi^{\alpha k-1}} - \frac{np'}{\pi^{\alpha k}}\right).$$

The sum with respect to z is zero unless n is a multiple of $\pi^{\alpha k-1}$. If $n = \pi^{\alpha k-1}\nu$, we have

$$A_{\pi^{\alpha k}} = \pi^{\alpha(k-s)-1} \sum_{p'} e\left(-\frac{\nu p'}{\pi}\right).$$

The last sum is -1 or $\pi - 1$, according as ν is not or is divisible by π. This proves the lemma.

4.3. Lemma 4. *If* $(\pi, k) = 1$, $1 < \mu < k$,

$$A_{\pi^{\mu}} = 0 \qquad (n \not\equiv 0 \pmod{\pi^{\mu-1}}),$$
$$A_{\pi^{\mu}} = -\pi^{\mu-s-1} \qquad (n \equiv 0 \pmod{\pi^{\mu-1}},\ n \not\equiv 0 \pmod{\pi^{\mu}}),$$
$$A_{\pi^{\mu}} = (\pi - 1)\pi^{\mu-s-1} \qquad (n \equiv 0 \pmod{\pi^{\mu}}).$$

(1) In the equation

$$S_{p,\pi^{\mu}} = \sum_{h} e\left(\frac{p h^{k}}{\pi^{\mu}}\right)$$

e write

$$h = \pi^{\mu-1} z + h' \quad (0 \leqq z < \pi,\ 0 \leqq h < \pi^{\mu-1});$$

nd we obtain

$$S_{p,\pi^\mu} = \sum_{h'} \sum_{z} e\left(\frac{p h'^k}{\pi^\mu} + \frac{k p h'^{k-1} z}{\pi}\right).$$

he sum with respect to z vanishes unless $h' \equiv 0 \pmod{\pi}$, or unless $h' = \pi h_1$, here $0 \leqq h_1 < \pi^{\mu-2}$. In this case the exponential is unity (since $\mu < k$), nd we obtain

$$S_{p,\pi^\mu} = \pi^{\mu-1}.$$

(2) We have thus

$$A_{\pi^\mu} = \pi^{-s} \sum_{p} e\left(-\frac{np}{\pi^\mu}\right).$$

Writing

$$p = \pi z + p' \quad (0 \leqq z < \pi^{\mu-1},\ 0 < p' < \pi)$$

e obtain

$$A_{\pi^\mu} = \pi^{-s} \sum_{p'} \sum_{z} e\left(-\frac{np'}{\pi^\mu} - \frac{nz}{\pi^{\mu-1}}\right),$$

nd the sum with respect to z vanishes unless $n = \pi^{\mu-1}\nu$, where ν is an nteger. In this case

$$A_{\pi^\mu} = \pi^{\mu-s-1} \sum_{p'} e\left(-\frac{\nu p'}{\pi}\right),$$

nd the sum is -1 or $\pi - 1$, according as ν is not or is divisible by π.

5. The form of χ_π $(k = 4, \pi > 2)$.

5.1. We now suppose $k = 4$, so that all the results of § 4 hold for > 2. Taking first the case $\mu = 0$, we have

$$|A_{\pi^{\alpha k}}| \leqq \pi^{\alpha(k-s)},$$

y Lemma 3.

Next, if $\mu = 1$, we have $|A_\pi| < \pi$ and so

$$|A_{\pi^{\alpha k+1}}| < \pi^{\alpha(k-s)+1},$$

y Lemma 2.

Finally, if $1 < \mu < k$, we have

$$|A_{\pi^\mu}| < \pi^{\mu-s},$$

y Lemma 4, and

$$|A_{\pi^{\alpha k+\mu}}| < \pi^{\alpha(k-s)+\mu-s},$$

y Lemma 2.

Thus the terms of χ_π may be exhibited in the form[7])

$$\begin{aligned}&1+A_\pi+[\pi^{2-s}]+[\pi^{3-s}]+\ldots+[\pi^{k-1-s}]\\&+\pi^{k-s}([1]+[\pi]+[\pi^{2-s}]+[\pi^{3-s}]+\ldots+[\pi^{k-1-s}])\\&+\pi^{2(k-s)}([1]+[\pi]+[\pi^{2-s}]+[\pi^{3-s}]+\ldots+[\pi^{k-1-s}])\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

where $[x]$ denotes a number whose modulus is less than x. Hence (provided only $s>k$) we have

$$\chi_\pi = 1+A_\pi+B_\pi,$$

where

$$|B_\pi| < \frac{\pi^{k-s}-\pi^{2-s}}{\pi-1}+\frac{\pi^{k-s}}{1-\pi^{k-s}}\left(1+\pi+\frac{\pi^{k-s}-\pi^{2-s}}{\pi-1}\right).$$

Taking now $k=4$, $s>20$, we have

$$|B_\pi| < \pi^{-17}+2\pi^{-17}(1+\pi+\pi^{-17}) < 7\,\pi^{-16} < \pi^{-14},$$

$$\chi_\pi = 1+A_\pi+[\pi^{-14}]. \tag{5.11}$$

5.2. When we come to consider A_π, it is necessary to distinguish different cases.

Suppose first that π is of the form $4m+3$. Then the residues of h^4 to modulus π are the same as those of h^2, and $S_{p,\pi}$ reduces to an ordinary Gaussian sum. Thus $|S_{p,\pi}| \leqq \sqrt{\pi}$ and

$$|A_\pi| < \pi^{1-\frac{1}{2}s} < \pi^{-9},$$

$$\chi_\pi = 1+[\pi^{-9}]+[\pi^{-14}] = 1+[\pi^{-8}] \quad (\pi = 4m+3).$$

Next, suppose π of the form $4m+1$. Then[8])

$$|S_{p,\pi}| < 3\sqrt{\pi}$$

and

$$|A_\pi| < \pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^s.$$

If $\pi=17$, $|A_{17}| < 17\left(\frac{3}{4}\right)^{21} < \frac{1}{10}$,

$$\chi_{17} = 1+[\tfrac{1}{10}]+[17^{-14}] = 1+[\tfrac{1}{9}]. \tag{5.21}$$

If $\pi \geqq 29 > 27$, $3^{21} < \pi^7$, $\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^{21} < \pi^{-3\cdot5}$, $|A_\pi| < \pi^{-2\cdot5}$,

---

[7]) It should be observed that, owing to the vanishing of $A_{\pi^{ak}}$ and $A_{\pi^{ak+l}}$ when n does not satisfy certain congruence conditions, χ_π is in all cases a *finite* series; but this is irrelevant for our argument.

[8]) See H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, S. 584. In Weber's notation $S_{p,\pi}$ is one of the numbers

$$\zeta = 4\eta+1 = \sqrt{n}+(i,\eta)+(-i,\eta).$$

and

$$(5.22)\qquad \chi_\pi = 1 + [\pi^{-2\cdot 5}] + [\pi^{-14}] = 1 + [\pi^{-2}] \qquad (\pi = 4m+1 \geqq 29).$$

From Lemma 1, (5.11), (5.21), and (5.22), it follows that

$$S = \chi_2\,\chi_5\,\chi_{13}\,(1 + [\tfrac{1}{9}]) \prod_{\pi = 4m+1 \geqq 29} (1 + [\pi^{-2}]) \prod_{\pi = 4m+3} (1 + [\pi^{-8}]).$$

Thus *in order to establish our conclusion when* $s = 21$, *it is only necessary to show that*

$$|\chi_2| > \sigma > 0, \quad |\chi_5| > \sigma, \quad |\chi_{13}| > \sigma.$$

5.3. We find by direct calculation that[9])

$$S_{1,5} = 1 + 4e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad S_{2,5} = 1 + 4e^{\frac{4\pi i}{5}}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$

$$|S_{p,5}| \leqq \sqrt{17 + 8\cos\frac{2\pi}{5}} = \sqrt{15 + 2\sqrt{5}}.$$

It is however (as we have to consider the case of 13 also) more convenient to proceed as follows. The numbers $S_{p,5}$ are the roots of the equation[10])

$$(\zeta^2 + 15)^2 = 20(\zeta - 1)^2,$$

from which

$$\zeta = \pm\sqrt{5} \pm i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}},$$

$$|\zeta|^2 \leqq 15 + 2\sqrt{5} < 19{\cdot}473,$$

$$|S_{p,5}| = |\zeta| < 4{\cdot}413,$$

$$|A_5| < 4\,(\cdot 8826)^{21} < \cdot 291,$$

$$\chi_5 = 1 + [\cdot 291] + [5^{-14}] = 1 + [\cdot 3],$$

$$|\chi_5| > \cdot 7 = \sigma.$$

5.4. Similarly the various values of $S_{p,13}$ are the roots of

$$(\zeta^2 + 39)^2 = 52(\zeta - 3)^2,$$

from which

$$\zeta = \pm\sqrt{13} + i\sqrt{26 + 6\sqrt{13}},$$

$$|\zeta|^2 \leqq 39 + 6\sqrt{13} < 60{\cdot}7,$$

$$|S_{p,13}| = |\zeta| < 7{\cdot}8,$$

$$|A_{13}| < 12\,(\cdot 6)^{21} < \cdot 002,$$

so that

$$|\chi_{13}| > \sigma.$$

---

[9]) From this point onwards π is used in the ordinary sense.

[10]) Weber, l. c., p. 584.

The proof of Theorems A *and* B *is thus reduced to a proof that* $|\chi_2| > \sigma$.

6. Discussion of χ_2.

6.1. The arguments of § 3 fail when $\pi = 2$, and it is necessary to go back to the definitions of $A_2, A_4, \dots$ The first step is to calculate the sums $S_{p,2^\nu}$. We find by direct calculation that

$$S_{p,2} = 0,\ S_{p,4} = 2(1+e^{\frac{1}{2}p\pi i}),\ S_{p,8} = 4(1+e^{\frac{1}{4}p\pi i}),\ S_{p,16} = 8(1+e^{\frac{1}{8}p\pi i})$$

If $\nu \geqq 5$,

$$S_{p,2^\nu} = \sum_h e\left(\frac{ph^4}{2^\nu}\right) \qquad (0 \leqq h < 2^\nu).$$

Writing

$$h = 2^{\nu-3}z + h' \quad (0 \leqq z < 8,\ 0 \leqq h' < 2^{\nu-3}),$$

we obtain

$$S_{p,2^\nu} = \sum_{h'}\sum_z e\left(\frac{ph'^4}{2^\nu} + \frac{ph'^3 z}{2}\right);$$

and the sum with respect to z is zero unless h' is even. Supposing $h' = 2h_1$, so that $0 \leqq h_1 < 2^{\nu-4}$, we obtain

$$S_{p,2^\nu} = 8\sum_{h_1} e\left(\frac{ph_1^4}{2^{\nu-4}}\right) = 8S_{p,2^{\nu-4}}.$$

Thus

$$S_{p,2^{4\alpha+\mu}} = 2^{3\alpha} S_{p,2^\mu} \qquad (\alpha > 0,\ 0 < \mu \leqq 4).$$

6.2. Observing that $A_2 = 0$, we write

$$\begin{aligned}\chi_2 &= 1 + (A_4 + A_8 + A_{16}) + (A_{64} + A_{128} + A_{256}) + \dots \\ &= 1 + (A_4 + A_8 + A_{16}) + B.\end{aligned}$$

For $\alpha > 0$, $2 \leqq \mu \leqq 4$, we have

$$|A_{2^{4\alpha+\mu}}| = \left|\sum_p \left(\frac{S_{p,2^\mu}}{2^{\alpha+\mu}}\right)^s e\left(-\frac{np}{2^{4\alpha+\mu}}\right)\right| < 2^{4\alpha+\mu}(2^{-\alpha})^s = 2^{\mu-(s-4)\alpha},$$

$$|A_{2^{4\alpha+2}} + A_{2^{4\alpha+3}} + A_{2^{4\alpha+4}}| < 28 \cdot 2^{-17\alpha},$$

$$|B| < 28\,\frac{2^{-17}}{1-2^{-17}} < 2^{-12} < \cdot 00025,$$

$$\chi_2 = 1 + A_4 + A_8 + A_{16} + [\cdot 00025].$$

6.3. Of the terms A_4, A_8, A_{16} the most important is the last. We have

$$A_{16} = \sum_{p=1,3,\dots,15} \left(\cos\frac{p\pi}{16}\right)^{21} \exp\left(\frac{21p\pi i}{16} - \frac{np\pi i}{16}\right) = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_7,$$

here $\mathfrak{A}_1$ is given by $p = 1, 15$; $\mathfrak{A}_3$ by $p = 3, 13$, and so on. And

$$\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)^{21} = -\left(\cos\frac{15\pi}{16}\right)^{21} = \cdot 665\,350 + [3\cdot 10^{-6}],$$

$$\mathfrak{A}_1 = -(1\cdot 3307 + [10^{-4}])\cos\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{n\pi}{8}\right);$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{16}\right)^{21} = -\left(\cos\frac{13\pi}{16}\right)^{21} = \cdot 020\,736 + [10^{-6}],$$

$$\mathfrak{A}_3 = (\cdot 0415 + [10^{-4}])\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3n\pi}{8}\right);$$

$$\left(\cos\frac{5\pi}{16}\right)^{21} = -\left(\cos\frac{11\pi}{16}\right)^{21} = [5\cdot 10^{-6}],$$

d so also for $\left(\cos\frac{7\pi}{16}\right)^{21}$. Thus

$$\mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_7 = [2\cdot 10^{-5}].$$

Similarly we may write

$$A_8 = \sum_{1,3,5,7}\left(\cos\frac{p\pi}{8}\right)^{21}\exp\left(\frac{21\,p\pi i}{8} - \frac{np\pi i}{4}\right) = \mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_3',$$

here $\mathfrak{A}_1'$ is given by $p = 1, 7$, and so on: and

$$\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^{21} = -\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{21} = \cdot 189\,636 + [10^{-6}],$$

$$\mathfrak{A}_1' = -(\cdot 3793 + [10^{-4}])\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right);$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{21} = -\left(\cos\frac{5\pi}{8}\right)^{21} = [10^{-8}],$$

$$\mathfrak{A}_3' = [10^{-7}].$$

Finally

$$A_4 = \sum_{1,3}\left(\cos\frac{p\pi}{4}\right)^{21}\exp\left(\frac{21\,p\pi i}{4} - \frac{n\pi i}{2}\right) = [2^{-9\cdot 5}] = [\cdot 0014].$$

Collecting our results, we may write

$$\chi_2 = 1 - 1\cdot 3307\cos\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{n\pi}{8}\right) + \cdot 0415\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3n\pi}{8}\right)$$
$$- \cdot 3793\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right) + 3[\cdot 0001] + [\cdot 0017],$$

d the total possible error is $[\cdot 002]$.

6. 4. We have now to verify that the sum of the first four terms of χ_2 in all cases greater than $\cdot 002$. It is easy to see that the least favourable cases are those in which $\cos\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{n\pi}{8}\right)$ has its greatest possible lue, viz. $\cos\frac{\pi}{16}$. This happens when $n \equiv 2, 3 \pmod{16}$. We have then

$$\chi_2 = 1 - 1{\cdot}3307 \cos\frac{\pi}{16} - {\cdot}0415 \cos\frac{3\pi}{16} + {\cdot}3793 \cos\frac{\pi}{8} + [{\cdot}002]$$
$$= 1 - 1{\cdot}3051 - {\cdot}0345 + {\cdot}3504 + 3[{\cdot}0001] + [{\cdot}002]$$
$$= {\cdot}0108 + [{\cdot}0023] > {\cdot}0085 = \sigma > 0.$$

It will easily be verified that, when n has any other residue t modulus 16, the margin is much greater.

7. Conclusion.

7.1. We have now proved Theorem B when $s = 21$, and Theorem A is an obvious corollary. It is not immediately obvious that, if Theorem B is true for $s = 21$, it is also true for $s > 21$. All our arguments ar valid for $s \geqq 21$, except those of §§ 6.3—6.4; but the numerical discussio of these two paragraphs has, strictly, to be repeated for each value of in question. Our own calculations refer only to the cases $s = 21, 31, 3$ in which we have, at various times, been particularly interested. N point of principle is involved, and the calculations in other cases ma be left to anyone who may be sufficiently interested in the matter t make them[11]).

It is evident that we may, with the help of the singular series, stud as closely as we wish the variations of $r_{4,5}(n)$ as n assumes variou residues to modulus 16. It is clear, for example, that the number $16m + 2$ and $16m + 3$ are, to put it roughly, less readily expressibl by 21 biquadrates than any other numbers, and something like 200 time less readily expressible than the numbers $16m + 10$ and $16m + 11$.

There is no difficulty in applying the methods of this paper to th proof that

$$G(k) \leqq (k-2)2^{k-1} + 5 \tag{7.11}$$

for any *particular* value of k, as for example 3, 5, 6 or 7. We fin thus that $G(3) \leqq 9$, $G(5) \leqq 53$, $G(6) \leqq 133$, and $G(7) \leqq 325$. Th first of these inequalities is not new[12]), and in fact Landau has prove that $G(3) \leqq 8$: but the numbers 53, 133, 325 compare very favourabl with the 58, 478, 3806 at present known. The proof that (7.11) is tru *generally*, however, presents certain algebraical difficulties, of complicatio rather than of principle, and we must postpone it to a later memoi We have not indeed worked out this proof in detail, the analysis whic we possess carrying us only so far as the less favourable inequality

$$G(k) \leqq k2^{k-1} + 1$$

ndicated by our earlier researches.

[11]) See however the following note of Herr Ostrowski.

[12]) The accompanying asymptotic formula is of course new.

We conclude with one final remark. It might well be supposed that e proof of (7. 11) for (say) $k = 7$ or 13 would be more difficult than r $k = 4$. This is not so; the proof for $k = 4$ is, in essentials, more licate and critical than for any other value of k. The fact is that *is only for $k = 4$ that our inequality expresses something near the timate truth.* It is known that $G(4) \geqq 16$, and, the difference be- een 16 and 21 is comparatively small: this corresponds to the facts at *the critical factor of* § 6 *nearly vanishes in the least favourable case,* d that there is a term in χ_2 which is sometimes actually greater than e leading term 1. When k is larger, our value is much too high, and e singular series tends (for such values of s as are contemplated in our alysis) to be dominated completely by its leading term.

(Eingegangen im Januar 1920.)

Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

In der Abhandlung der Herren Hardy und Littlewood: *Some Problems of „Partitio numerorum“; II: Proof that every large number is the sum of at most* 21 *biquadrates*[1]), wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei allgemein für ganze positive k, s durch $r_{k,s}(n)$ der Koeffizient von x^n in $\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^k}\right)^s$ $(k>2)$ bezeichnet. Ist $C_{k,s}$ die positive nur von k, s abhängige Konstante $\dfrac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}$, und bedeutet $S_{k,s}(n)$ die unendliche Reihe

$$S_{k,s}(n)=1+\sum_{q=2}^{q=\infty}\sum_{p}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np), \quad 0<p<q, \quad (p,q)=1$$

$$S_{p,q}=\sum_{h=0}^{q-1}e^{\frac{2h^k p i\pi}{q}}, \quad e_q(-np)=e^{\frac{2np\pi i}{q}},$$

die für $s>(k-2)2^{k-1}+4$ absolut und in n gleichmäßig konvergiert, so gilt für $s>(k-2)2^{k-1}+4$

$$(1) \qquad r_{k,s}(n)=C_{k,s}n^{s/k-1}S_{k,s}(n)+O(n^{\lambda}), \quad \lambda<\frac{s}{k}-1.$$

Um zu beweisen, daß jede hinreichend große Zahl als eine Summe von s nicht negativen k-ten Potenzen darstellbar ist, genügt es offenbar zu zeigen, daß $S_{k,s}(n)$ für hinreichend große n oberhalb einer festen positiven Schranke liegt. (Für unendlich viele ganze positive n kann offenbar

---

[1]) Vgl. die vorhergehende Abhandlung.

$_s(n)$ nicht unterhalb einer festen negativen Schranke liegen, da $r_{k,s}(n)$ ht negativ ist.)

Die Herren Hardy und Littlewood beweisen nun zunächst für les ganze positive k, daß $S_{k,s}(n)$ für hinreichend große s gleichmäßig n beliebig wenig von 1 verschieden ist. — Dieses letzte Resultat ist ofern von besonderem Interesse, als es zeigt, daß $r_{k,s}(n)$ für sehr große m wesentlichen nur von der Größe der Zahl n, nicht aber von ihren eziellen arithmetischen Eigenschaften abhängt. — In der zitierten Arbeit ngen aber die Herren Hardy und Littlewood darüber hinaus den weis, daß für $k=4$ bereits $S_{4,21}(n)$ oberhalb einer positiven Schranke gt, womit sie die Darstellbarkeit jeder hinreichend großen Zahl als mme von 21 Biquadraten erweisen. Damit ist natürlich dasselbe insondere für jedes $s>21$ bewiesen. Sie formulieren aber als *Theorem B* n Satz, daß für jedes $s \geqq 21$

$$r_{4,s}(n) \sim C_{4,s}\, n^{s/4-1}\, S_{4,s}(n)$$

, und bemerken, was den Fall $s>21$ anbetrifft: „It is not immediately vious that, if Theorem B is true for $s=21$, it is also true for $s>21$. l our arguments are valid for $s \geqq 21$, except those of §§ 6. 3—6. 4; t the numerical discussion of these two paragraphs has, strictly, to be peated for each value of s in question. Our own calculations refer only the cases $s=21, 31, 33$ in which we have, at various times, been rticularly interested. No point of principle is involved, and the calations in other cases may be left to anyone who may be sufficiently erested in the matter to make them."

Ich möchte nun im folgenden einen kleinen Beitrag zu diesen Unterchungen liefern, indem ich direkt ohne jede numerische Rechnung durch erlegungen allgemeinen Charakters aus dem Theorem B für $s=21$ das eorem B für jedes höhere s ableite. Die Überlegung ist an $k=4$ nicht unden. Ich werde allgemein zeigen:

Ist $s>(k-2)2^{k-1}+4$, *so daß* (1) *gilt, und ist* $S_{k,s}(n)$ *für dieses* s *hinreichend große* n *zwischen den positiven Schranken* σ, σ' *enten, so daß für hinreichend große* n

$$r_{k,s}(n) \sim C_{k,s}\, n^{s/k-1}\, S_{k,s}(n), \quad \sigma' > S_{k,s}(n) > \sigma > 0$$

, so liegt $S_{k,s}(n)$ *auch für jedes größere* s *zwischen denselben Schranken, daß* (3) *dann auch für jedes größere* s *gilt.*

Unsere Betrachtung liefert aber noch etwas mehr. Ist z. B. $k=4$, hängt, wie die Rechnungen der Herren Hardy und Littlewood erben haben, der Wert von $S_{4,21}(n)$ sehr wesentlich von der Restklasse dulo 16 ab, in der n liegt. Der ausschlaggebende Faktor im Ausdruck

für $S_{4,21}(n)$ ist (der andere Faktor ist zwar nicht konstant, weicht aber mit der Änderung von n nur wenig von 1 ab):

$$1 - 1{,}3307 \cos\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{n\pi}{8}\right) + 0{,}0415 \cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3n\pi}{8}\right) - 0{,}3793 \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right) + [0{,}002],$$

wo der absolute Betrag von $[0{,}002]$ kleiner als $0{,}002$ ist. Dieser Ausdruck ist größer als 0,0085, sein Wert ist aber offenbar je nach der Restklasse von n mod 16 stark verschieden. Daraus folgt z. B., wie die Herren Hardy und Littlewood hervorheben, daß die Zahlen $16m+2$ und $16m+3$ ungenau ausgedrückt ungefähr 200mal weniger oft als Summen von 21 Biquadraten dargestellt werden können, als die Zahlen $16m+10$ und $16m+11$. Andererseits wird dieser Unterschied im Verhalten verschiedener Restklassen mit wachsendem s vollständig verwischt. Unsere Überlegung gibt uns nun einen gewissen Einblick in die Art und Weise, wie sich die Verteilung der Dichtigkeiten der Darstellungsanzahlen auf einzelne Restklassen von einem s zum anderen allmählich ausgleicht. Das Resultat läßt sich ungenau ungefähr so ausdrücken, daß, wenn allgemein durch $A_{4,s,\mu}$ die Durchschnittswerte von $S_{4,s}(n)$ für die Restklassen $n \equiv \mu \pmod{16}$ bezeichnet werden, $A_{4,s+1,\mu}$ gleich $\frac{1}{2}(A_{4,s,\mu} + A_{4,s,\mu-1})$ ist.

Ich will also (1) und (3) als richtig annehmen und zunächst beweisen, daß $S_{k,s+1}(n)$ für alle hinreichend große n oberhalb der Schranke $\sigma > 0$ liegt. Zu dem Zwecke gehe ich von der Gleichung

$$r_{k,s+1}(n) = r_{k,s}(n) + 2\sum_{m=1}^{\infty} r_{k,s}(n-m^k) \tag{4}$$

aus, die aus der Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{k,s+1}(n)\, x^n = \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_{k,s}(n)\, x^n\right)$$

unmittelbar folgt. Ich kann in (4) offenbar m in der Summe rechts beliebig groß werden lassen, falls ich $r_{k,s}(n)$ für negative n als 0 definiere. Für jedes positive ε gilt wegen (3) für hinreichend große n

$$r_{k,s}(n) > (\sigma - \varepsilon) C_{k,s}\, n^{s/k-1}.$$

Aus (4) und (3) folgt daher, da $n - m^k$ für hinreichend große n höchstens für ein m unterhalb einer festen Grenze liegt, solange es positiv bleibt:

$$r_{k,s+1}(n) > 2(\sigma-\varepsilon) C_{k,s} \sum_{m=1}^{[n^{1/k}]} (n-m^k)^{s/k-1} - O(n^{s/k-1})$$

$$= 2(\sigma-\varepsilon) C_{k,s}\, n^{\frac{s+1}{k}-1} \int_0^1 (1-x^k)^{s/k-1}\, dx - O(n^{s/k-1}).$$

n ist aber

$$-x^k)^{s/k-1}\,dx = \frac{1}{k}\int_0^1 x^{1/k-1}(1-x)^{s/k-1}\,dx = \frac{1}{k}B\left(\frac{1}{k},\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{k}\right)}\,^{2}).$$

her ist

$$2C_{k,s}\int_0^1 (1-x^k)^{s/k-1}\,dx = 2\frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}\cdot\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{k}\right)}$$

$$= \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{1+s}{k}\right)} = C_{k,s+1}.$$

raus folgt

$$r_{k,s+1}(n) > (\sigma-\varepsilon)C_{k,s+1}n^{\frac{s+1}{k}-1} - O(n^{s/k-1}).$$

eraus und aus der Formel (1), für $s+1$ geschrieben, folgt aber, daß $_{s+1}(n) > \sigma - 2\varepsilon$ für hinreichend große n ist. Dieselbe Ungleichung muß er auch für *jedes* ganze n gelten. Denn da die Reihe $S_{k,s+1}(n)$ gleichßig für alle ganzen n konvergiert, läßt sie sich in der Form schreiben: $(n)+R(n)$, wo $|R(n)|<\varepsilon$ ist, $A(n)$ aber ein endliches trigonomesches Polynom in n mit einer endlichen ganzzahligen Periode ist. Da $n)$ für hinreichend große ganze n größer als $\sigma-3\varepsilon$ ist, gilt dieselbe gleichung für alle ganze n, daher ist stets $S_{k,s+1}(n) > \sigma - 4\varepsilon$, oder, dies für jedes positive ε gilt,

$$S_{k,s+1}(n) \geqq \sigma, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

In genau derselben Weise zeigt man, daß

$$S_{k,s+1}(n) \leqq \sigma'$$

— Zugleich haben wir die Gleichung (3) für $s+1$, damit auch für e größeren ganzzahligen s, bewiesen. —

Erinnern wir uns, welche Bedeutung $r_{k,s}(n)$ hat, so können wir aus) und dem oben Bewiesenen schließen: *Die Anzahl der Lösungen der ophantischen Gleichung*

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{s+1}^k$$

---

[2]) Unter $B(p,q)$ verstehen wir das sogenannte Eulersche Integral erster Art $^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, für welches bekanntlich die Formel gilt $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

in positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$ — *die von den Herren Hardy und Littlewood mit* $\bar{r}_{k,s+1}(n)$ *bezeichnete Größe — ist für hinreichend große* s

$$\sim 2^{-s-1} C_{k,s+1} S_{k,s+1}(n)\, n^{\frac{s+1}{k}-1}.$$

Wir kehren nun zu $k=4$ zurück, und nehmen $s \geqq 21$ an. Es möge der Wert von $S_{4,s}(n)$ für $n \equiv \mu \pmod{16}$ allgemein zwischen den Grenzen α_μ, A_μ enthalten sein, wo $0 < \alpha_\mu < A_\mu$ ist. Wir betrachten nun $r_{4,s+1}(n)$ für die Zahlen $n \equiv \mu \pmod{16}$. Nach (4) ist

$$r_{4,s+1}(n) = r_{4,s}(n) + 2\sum_{m=1}^{\infty} r_{4,s}(n-m^4). \tag{5}$$

Da nun m^4 kongruent 0 oder 1 (mod 16) ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, können wir die Summe in (5) in zwei Bestandteile zerlegen

$$\sum_{i=1} r_{4,s}(n-(2i-1)^4), \quad \sum_{i=1} r_{4,s}(n-16i^4).$$

Für die Glieder der ersten Summe erhalten wir für ein festes positives ε

$$C_{4,s}(\alpha_{\mu-1}-\varepsilon)(n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1} < r_{4,s}(n-(2i-1)^4)$$
$$< C_{4,s}(A_{\mu-1}+\varepsilon)(n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1}, \tag{6}$$

solange $n-(2i-1)^4$ nicht unterhalb einer Zahl $N(\varepsilon)$ liegt. Für hinreichend große n liegt aber $n-(2i-1)^4$ höchstens für ein i unterhalb $N(\varepsilon)$, solange es positiv bleibt. Daher erhalten wir aus (6)

$$C_{4,s}(\alpha_{\mu-1}-\varepsilon)\sum_{i=1}(n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1} - O(1) < \sum_{i=1} r_{4,s}(n-(2i-1)^4)$$
$$< C_{4,s}(A_{\mu-1}+\varepsilon)\sum_{i=1}(n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1} + O(1),$$

wo die Summen über alle ganze $i \geqq 1$ erstreckt werden, für die $n-(2i-1)^4$ nicht negativ bleibt. Andererseits ist

$$\sum_{i=1}(n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1} = \int_0^{\frac{n^{\frac{1}{4}}+1}{2}} (n-(2i-1)^4)^{\frac{s}{4}-1}\, di + O\left(n^{\frac{s}{4}-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2} n^{\frac{s+1}{4}-1} \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{s}{4}-1}\, dx + O\left(n^{\frac{s}{4}-1}\right).$$

ter Benutzung des oben angegebenen Wertes des Integrals $\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{s}{4}-1}$
alten wir daher

$$\tfrac{1}{4} C_{4,s+1}(\alpha_{\mu-1}-\varepsilon) n^{\frac{s+1}{4}-1} - O(n^{\frac{s}{4}-1}) < \sum_{i=1} r_{4,s}(n-(2i-1)^4)$$

$$< \tfrac{1}{4} C_{4,s+1}(A_{\mu-1}+\varepsilon) n^{\frac{s+1}{4}-1} + O(n^{\frac{s}{4}-1}).$$

aloge Abschätzung ergibt sich für $\sum r_{4,s}(n-16i^4)$. Zusammenfassend
alten wir für hinreichend großes n wegen (5)

$$_{+1}(\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu-3\varepsilon) n^{\frac{s+1}{4}-1} < r_{4,s+1}(n) < \tfrac{1}{2} C_{4,s+1}(A_{\mu-1}+A_\mu+3\varepsilon) n^{\frac{s+1}{4}-1}.$$

eraus und aus (3), für $s+1$ geschrieben, folgt endlich, daß $S_{4,s+1}(n)$
hinreichend große n zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}(\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu-4\varepsilon)$ und
$A_{\mu-1}+A_\mu+4\varepsilon)$ bleiben. Hieraus erhalten wir aber durch eine Über-
ung, die der oben beim Beweis der Gleichung (3) angestellten durchaus
alog ist:

$$) \qquad \tfrac{1}{2}(\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu) \leqq S_{4,s+1}(n) \leqq \tfrac{1}{2}(A_{\mu-1}+A_\mu) \qquad (n \equiv \mu \pmod{16}).$$

s dem von den Herren Hardy und Littlewood hervorgehobenen
nstand, daß die Zahlen $16m+2$ und $16m+3$ sich ungefähr 200 mal
niger oft als Summen von 21 Biquadraten darstellen lassen als die
hlen $16m+10$ und $16m+11$ folgt nach (7) z. B., daß die Zahlen
$m+3$ sich ungefähr 200 mal weniger oft als Summen von 22 Biqua-
aten darstellen lassen als die Zahlen $16m+11$. Allgemein können
r sagen: Verhalten sich für ein $s \geqq 21$ die Dichtigkeiten der Darstel-
ngsanzahlen[3]) in den Restklassen $0, 1, \ldots, 15 \pmod{16}$ ungefähr wie
$_{,0}, A_{s,1}, \ldots, A_{s,15}$, so verhalten sich die Dichtigkeiten der Darstellungs-
zahlen in diesen Restklassen für $s+1$ ungefähr wie

$$A_{s,15}+A_{s,0}, \quad A_{s,0}+A_{s,1}, \quad A_{s,1}+A_{s,2}, \quad \ldots, \quad A_{s,14}+A_{s,15}.$$

ch diese Überlegungen sind an $k=4$ nicht gebunden. Ist z. B. $k=2^i$,
ist $m^{2^i} \pmod{2^{i+2}}$ entweder kongruent 0 oder 1. Wir können daher
die Verteilung der Dichtigkeiten der Darstellungsanzahlen auf die Rest-
assen $(\mathrm{mod}\ 2^{i+2})$ genau dieselben Überlegungen knüpfen. Oder ist z. B. $k=3$,
sind die dritten Potenzen ganzer Zahlen (mod 9) entweder kongruent 0,
er $+1$, oder -1. Wir können daher z. B. schließen: Verhalten sich
ein s, für welches (1) und (3) gilt, die Dichtigkeiten der Darstellungs-

[3]) Für $s>21$ können wir für die $r_{4,s}(n)$ auch die Anzahl der Lösungen von
$+\ldots+x_s^4=n$ in ganzen *positiven* Zahlen setzen.

anzahlen in den Restklassen (mod 9) ungefähr wie $A_{3,s,0}, A_{3,s,1}, \ldots, A_{3,s,8}$ so verhalten sich die Dichtigkeiten der Darstellungsanzahlen als Summen von $s+1$ Kuben in denselben Restklassen ungefähr wie

$$A_{3,s,8}+A_{3,s,0}+A_{3,s,1},\quad A_{3,s,0}+A_{3,s,1}+A_{3,s,2},\ \ldots,\quad A_{3,s,7}+A_{3,s,8}+A_{3,s,0}$$

In diesem Falle müssen sich daher die Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Darstellungsanzahlen beim Übergang von einem s zum anderen schneller ausgleichen, als wenn k eine Potenz von 2 ist. Man übersieht auch ohne weiteres, wie das Analogon der Formel (7) lautet.

(Eingegangen im Januar 1920.)

Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$.

Von

T. Carleman in Upsala.

Wir betrachten einen homogenen Körper (D), in dessen Innerem sich e punktförmige Wärmequelle P von konstanter Ergiebigkeit befindet. r die von einem Flächenelement $d\sigma$ in der Umgebung eines Punktes p Begrenzungsfläche Ω pro Sekunde ausgestrahlte Wärmemenge schreiben r

$$F(u)d\sigma,$$

u die absolute Temperatur bedeutet, und machen über die Funktion $u)$, die noch von p abhängen kann, folgende Voraussetzung:

$$\begin{cases} F'(u) > 0, \\ \lim\limits_{u=\infty} F(u) = \infty, \\ F(0) \leqq 0. \end{cases}$$

Wäre z. B. der Körper vollkommen schwarz, so hätte man nach dem setz von Stefan-Boltzmann

$$F(u) = ku^4$$

setzen, vorausgesetzt, daß von außen her keine Einstrahlung stattfindet. enn man annimmt, daß im Innern des Körpers die Fourierschen ärmeleitungsgesetze noch gelten, so würde man, um die Temperatur- teilung bei Wärmegleichgewicht zu bestimmen, auf das folgende mathe- tische Problem stoßen: Eine Lösung von $\Delta u = 0$ zu finden, die 1.) überall (D) regulär ist außer in der Umgebung des Punktes P, wo sie die rm

$$\frac{1}{r_{Pq}} + \text{reg. Funktion}$$

haben soll, 2.) auf der Begrenzungsfläche Ω der Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = F(u) \tag{2}$$

genügt, wo $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung von u längs der inneren Normalen bedeutet.

Es empfiehlt sich, zunächst das entsprechende eindimensionale Problem zu behandeln, welches sich folgendermaßen formulieren läßt: Eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq b$ stetige Lösung von $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ zu bestimmen, deren erste Ableitung 1. nur für $x = \xi$ $(0 < \xi < b)$ unstetig wird und zwar derart, daß

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi+0} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi-0} = -1,$$

und 2. in 0 und b die Randbedingungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = F_1(u); \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=b} = -F_2(u)$$

erfüllt, wo $F_1(u)$ und $F_2(u)$ den Bedingungen (1) genügen.

Setzt man

$$u = \alpha x + \beta \qquad \text{für} \quad 0 \leqq x < \xi,$$
$$u = \alpha_1(x-b) + \beta_1 \quad \text{„} \quad \xi < x \leqq b,$$

so ergeben sich für die Konstanten α, β, α_1, β_1 die folgenden Bedingnngen

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\xi + \beta = \alpha_1(\xi - b) + \beta_1, && (3)\\ &\alpha_1 - \alpha + 1 = 0, && (4)\\ &\alpha = F_1(\beta), && (5)\\ &\alpha_1 = -F_2(\beta_1). && (6) \end{aligned}\right.$$

Wenn wir mittels der Gleichungen (3), (4), (5) α, α_1, β_1 als Funktionen von β darstellen, so finden wir, daß dieses System mit

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 = F_1(\beta) - 1,\\ &\beta_1 = \xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b,\\ &\alpha = F_1(\beta),\\ &F_1(\beta) + F_2(\xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b) - 1 = 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

gleichbedeutend wird. Die letzte Gleichung in (7), deren linke Seite wir mit $\Phi(\beta)$ bezeichnen wollen, hat eine und nur eine positive Wurzel. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß der Ausdruck

$$\xi + \beta + (F_1(\beta) - 1)b$$

für einen positiven Wert β' verschwindet. Er ist nämlich für $\beta = 0$ negativ und für $\beta = \infty$ positiv. $\Phi(\beta)$ ist eine monoton wachsende Funktion, die für $\beta \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt, während für $\beta = \beta'$

$$\Phi(\beta') = F_1(\beta') + F_2(0) - 1 = -\frac{(\xi + \beta')}{b} + F_2(0) < 0.$$

Unser System besitzt also ein und nur ein Lösungssystem, für welches > 0, $\beta_1 > 0$. Das betrachtete eindimensionale Problem hat also eine nd nur eine Lösung.

Wir gehen nun zur Behandlung des allgemeinen dreidimensionalen roblems über und beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Lösung. Gäbe s zwei den Bedingungen des Problems genügende Funktionen u und u', o wäre $v = u - u'$ eine in D reguläre harmonische Funktion, für welche uf Ω die Relation

$$\frac{\partial v}{\partial n} = F(u) - F(u') = vF'(u' + \Theta(u - u'))$$

$\Theta =$ eine zwischen Null und Eins gelegene, auf Ω veränderliche Größe) estände. Berücksichtigen wir noch die Gleichung

$$\iiint_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz + \int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial n}\,ds = 0,$$

o ergibt sich

$$\iiint_D \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz + \int_\Omega [v^2 F'(u' + \Theta(u - u'))]\,d\sigma = 0,$$

oraus, wegen $F'(u) > 0$, $v = 0$ folgt, womit die Eindeutigkeit be- iesen ist.

Wir führen nun in die Randbedingung einen Parameter h $(0 \leqq h \leqq 1)$ in, indem wir schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u + h(F(u) - u). \tag{8}$$

ie Funktion $u + h[F(u) - u]$ genügt für alle h zwischen 0 und 1 den edingungen (1).

Man nehme an, das Problem sei für einen gewissen Wert h_0 $(0 < h_0 < 1)$ urch eine Funktion u_0 lösbar, die auf Ω zwischen zwei positiven Größen und c_2 liegt. Wir machen noch die Voraussetzung, daß $F(u)$ eine eguläre analytische Funktion von u in jedem Punkt der Strecke $0 < u < \infty$ ei, und suchen eine Lösung für $h = h_0 + \alpha$ als eine Potenzreihe in α

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots$$

u bestimmen. Es müssen $u_1, u_2, \ldots, u_\nu \ldots$ reguläre harmonische Funktionen D sein, die noch gewisse Randbedingungen erfüllen müssen, welche ch ergeben, wenn wir den Ausdruck

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n} - u - h\,\Phi(u) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial n} - u_\nu\right)\alpha^\nu - (h_0+\alpha)\,\Phi\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu u_\nu\right) = \\ = \dfrac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 - h_0\,\Phi(u_0) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial u_\nu}{\partial n} - (1+h_0\,\Phi'(u_0))\,u_\nu\right\}\alpha^\nu - \\ - \alpha\,\Phi'(u_0)\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\,\alpha^\nu - \alpha\,\Phi(u_0) - \\ - (h_0+\alpha)\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(p)}(u_0)}{\lfloor p}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\,\alpha^\nu\right)^p, \end{cases}$$

wo

$$F(u) - u = \Phi(u),$$

nach Potenzen von α entwickeln und die so erhaltenen Koeffizienten gleich Null setzen. Man erhält folgende Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 - h_0\,\Phi(u_0) = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} - (1+h_0\,\Phi'(u_0))\,u_1 = \Phi(u_0), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n} - [1+h_0\,\Phi'(u_0)\,u_2 = \Phi'(u_0)\,u_1 + h_0\,\dfrac{\Phi''(u_0)}{2}\,u_1^2, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial n} - [1+h_0\,\Phi'(u_0)]\,u_3 = \Phi'(u_0)\,u_2 + h_0\,u_1\,u_2\,\Phi''(u_0) \\ \qquad\qquad + h_0\,\dfrac{\Phi^{(3)}(u_0)}{\lfloor 3}\,u_1^3 + \dfrac{\Phi''(u_0)}{2}\,u_1^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aus der Theorie der dritten Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ folgt, daß immer eine der Randbedingung

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial n} - [1+h_0\,\Phi'(u_0)]\,u = f$$

genügende in D reguläre harmonische Funktion existiert. In denjenigen Punkten auf Ω, wo u sein Maximum u_M oder Minimum u_m erreicht, muß gelten $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \leqq 0$ bzw. $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \geqq 0$. Aus (11) ergibt sich dann

$$u_M \cdot \operatorname{Min}[1+h_0\,\Phi'(u_0)] \leqq \operatorname{Max}|f|,$$
$$u_m \cdot \operatorname{Min}[1+h_0\,\Phi'(u_0)] \geqq -\operatorname{Max}|f|.$$

Es gibt also, wie leicht ersichtlich, eine von h_0 und u_0 $(0 \leqq h_0 \leqq 1)$ unabhängige nur von c_1 und c_2 abhängige Konstante k von solcher Beschaffenheit, daß die Lösung der Randwertaufgabe (11) der Ungleichung

$$(12)\qquad |u| < k\operatorname{Max}|f|$$

enügt. Es gibt ferner zwei nur von c_1 und c_2 abhängige Konstanten l und ϱ, derart daß

13) $$\left|\frac{\Phi^{(\nu)}(u_0)}{\lfloor \nu}\right| < A\varrho^\nu.$$

Man sieht aus (10) daß $\frac{\partial u_\nu}{\partial n} - (1 + h_0 \Phi'(u_0))u_\nu$ gleich einem gewissen Polynom mit positiven Koeffizienten in $u_1, u_2 \ldots u_{\nu-1}$ und eine endliche Anzahl von den Größen $\frac{\Phi^{(\nu)}(u_0)}{\lfloor \nu}$ ist. Genau dasselbe Polynom erhält man für u_ν, wenn man eine Funktion u als eine Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \alpha^\nu$ aus der Gleichung

$$u - \alpha \Phi'(u_0)\, u - \alpha \Phi(u_0) - (h_0 + \alpha) \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Phi^{(p)}(u_0)}{\lfloor p}\, u^p = 0$$

bestimmen will.

Bei Berücksichtigung von (12) und (13) folgert man nun, daß die aus den Gleichungen (10) rekursiv bestimmten Funktionen $u_1\, u_2 \ldots u_\nu \ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten derjenigen Potenzreihe

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \alpha^\nu,$$

die der Gleichung

$$\frac{z}{k} - \alpha A \varrho z - \alpha A - (1+\alpha) \sum_{p=2}^{\infty} A \varrho^p z^p = 0$$

genügt.

Weil diese Gleichung sicher eine in der Umgebung von $\alpha = 0$ reguläre Lösung besitzt, so ist hiermit die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d$, wo d eine nur von c_1 und c_2 abhängige positive Größe bedeutet, bewiesen.

Es sei N die innere in einem beliebigen Punkte Q auf Ω errichtete Normale. Der Abstand eines Punktes auf N von Q möge l heißen. Wir wollen zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial u_\nu}{\partial l} \alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d_1 < d$ auf der Strecke $Q'Q$ (Q' ist ein solcher in D gelegener Punkt, daß $Q'Q$ gänzlich D angehört) sowohl in bezug auf l wie auch in bezug auf α im Gebiete $|\alpha| < d_1$ gleichmäßig konvergiert.

Es gibt, wie die Theorie der zweiten Randwertaufgabe der Potentialgleichung lehrt, eine solche Konstante B, daß

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial l}\right| < B \operatorname{Max}\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| \text{ auf } \Omega.$$

Aus den Gleichungen (10) findet man nun

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| < \operatorname{Max}|1 + h_0 \Phi(u_0)| \cdot \operatorname{Max}|u_\nu| + \frac{a_\nu}{k}, \quad \left|\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right| < C \cdot a_\nu,$$

wo C eine Konstante bedeutet, und somit

$$\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial l}\right| < C' \cdot a_\nu \qquad (C' \text{ Konstante}),$$

woraus die Behauptung folgt.

Weil also

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \sum u_\nu \alpha^\nu$$

für $|\alpha| < d$ gleich der dort konvergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} \alpha^\nu$$

ist, so genügt infolge der Relationen (10)

$$\sum u_\nu \alpha^\nu \quad \text{für} \quad |h - h_0| < d$$

der Randbedingung (8).

Für $h = 0$ reduziert sich die Randbedingung (8) auf eine lineare, für welche wie bekannt unser Problem lösbar ist. Aus dem soeben Bewiesenen geht dann hervor, daß eine Potenzreihe $u(p, h)$ existiert, die das Problem noch für ein positives Intervall $0 \leqq h \leqq d'$ löst. Es folgt auch, daß diese Potenzreihe sicher längs der ganzen Strecke $0 \leqq h \leqq 1$ (den Punkt 1 einbegriffen) analytisch fortsetzbar ist, wenn der folgende Satz wahr ist: *Man kann a priori zwei positive von h unabhängige Konstanten γ_1 und γ_2 angeben, die so beschaffen sind, daß für jedes h $(0 \leqq h \leqq 1)$ eine Lösung u des Problems, wenn sie nur existiert, auf Ω die Ungleichung*

(14)
$$\gamma_1 < u < \gamma_2$$

erfüllt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die zu D gehörige Greensche Funktion G_p, welche in P wie $\frac{1}{r}$ unendlich wird. Das Maximum u' von u auf Ω möge in einem Punkte p' erreicht werden. Ebenso das Minimum u'' in einem Punkte p''. Die harmonischen Funktionen

$$u' + G_p - u \quad \text{und} \quad u - u'' - G_p$$

ind beide in D positiv und verschwinden in p' bzw. p''. Hieraus folgt, aß die normalen Ableitungen in diesen Punkten $\geqq 0$ sind. Somit

$$\left(\frac{\partial G_p}{\partial n}\right)_{p'} - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p'} \geqq 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p''} - \left(\frac{\partial G_p}{\partial n}\right)_{p''} \geqq 0.$$

Bezeichnen wir mit ω_1 und ω_2 die untere bzw. obere Grenze von $\frac{\partial G_p}{\partial n}$ (ω_1 und ω_2 sind beide positiv), so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p'} \leqq \omega_2; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{p''} \geqq \omega_1.$$

omit infolge (8)

15)
$$u' + h[F(u') - u'] \leqq \omega_2,$$
$$u'' + h[F(u'') - u''] \geqq \omega_1.$$

Vir können γ_2 als die obere Grenze für $0 \leqq h \leqq 1$ der positiven Wurzel u' er Gleichung

16)
$$u' + h[F(u') - u'] = \omega_2$$

nd γ_1 als die untere Grenze der positiven Wurzel u'' von

17)
$$u'' + h[F(u'') - u''] = \omega_1$$

ählen.

Hiermit ist die Lösbarkeit der Aufgabe, wenn $F(u)$ eine für $0 < u < \infty$ nalytische Funktion ist, für welche ferner $F'(u) > 0$, bewiesen. Wir önnen leicht durch einen Grenzübergang zeigen, daß es genügt, $F(u)$ als tetig und zunehmend vorauszusetzen. Zu diesem Zwecke führe man eine olge von auf der reellen Achse regulär analytischen Funktionen mit ositiver Ableitung $F_1(u), F_2(u), \ldots$ ein, die in einem beliebig großen ntervall $0 < u < l$ gleichmäßig gegen $F(u)$ konvergieren[1]). Es sei l rößer als die aus (16) bestimmte Zahl γ_2. Die zu $F_\nu(u)$ gehörige Lösung es Wärmeleitungsproblems nennen wir u_ν. Bedeutet ε eine beliebig leine positive Zahl $\left(\text{z. B. } \frac{\gamma_1}{2}\right)$, so kann eine Zahl n_0 so bestimmt wer- len, daß

18)
$$-\varepsilon + \gamma_1 < u_\nu < \gamma_2 + \varepsilon$$

ür $\nu > n_0$, wo γ_1 und γ_2 die aus (16) und (17) bestimmten Größen sind.

Es sei $G_2(p, q)$ die zur zweiten Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ gehörige Greensche Funktion für Punkte p und q, die auf der

[1]) Man kann z. B.

$$F_n(u) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (u-t)^2 + 1} \Phi_l(t)\, dt$$

etzen, wo

$$\Phi_l(t) = F(t), \; 0 \leqq t \leqq l;$$
$$\Phi_l(t) = F(l), \; t \geqq l; \quad \Phi_l(t) = \Phi_l(0), \; t < 0.$$

Fläche Ω liegen. Man kann die Differenz $u_\nu(p') - u_\nu(p'')$, wo p' und p'' zwei auf Ω gelegene Punkte sind, folgendermaßen ausdrücken:

$$(19)\quad \begin{cases} u_\nu(p') - u_\nu(p'') \\ = \frac{1}{r_{Pp'}} - \frac{1}{r_{Pp''}} - \frac{1}{4\pi}\int_\Omega [G_2(p',q) - G_2(p'',q)]\left[\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\right)_q - \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{Pq}}}{\partial n}\right)_q\right] d\sigma \\ = \frac{1}{r_{Pp'}} - \frac{1}{r_{Pp''}} - \frac{1}{4\pi}\int_\Omega [G_2(p',q) - G_2(p'',q)]\left[F_\nu(u_\nu) - \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{Pp}}}{\partial n}\right)_p\right] d\sigma \end{cases}$$

Hieraus folgert man unter Anwendung von (18), daß es zu jedem positiven ε eine positive von ν unabhängige Größe δ gibt, so daß

$$(20)\quad |u_\nu(p') - u_\nu(p'')| < \varepsilon,$$

sobald

$$r_{p'p''} < \delta.$$

Wir können infolge (18) mit Hilfe des sogenannten Diagonalverfahrens aus $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, eine solche Teilfolge $u_{n_1} u_{n_2}, \ldots, u_{n_\nu}, \ldots$ auswählen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} u_{n_\nu}$$

in abzählbar unendlich vielen auf Ω überall dicht liegenden Punkten existiert. Dann existiert aber infolge (20) dieser Grenzwert überall auf Ω, und zwar gleichmäßig. Hieraus erhält man nach bekannten Sätzen, daß $u_{n_1} u_{n_2}, \ldots, u_{n_\nu}, \ldots$ innerhalb Ω (eine beliebig kleine Umgebung des Punktes P ausgenommen) und auf dieser Fläche selbst gleichmäßig gegen eine in D harmonische Funktion u konvergieren, die in P die Singularität $\frac{1}{r_{Pp}}$ hat. Aus der Gleichung

$$\int_\Omega F_{n_\nu}(u_{n_\nu})\, d\sigma = 4\pi$$

erhalten wir

$$\int_\Omega F(u)\, d\sigma = 4\pi.$$

Es sei v eine in P wie $\frac{1}{r_{Pp}}$ singuläre Lösung von $\Delta u = 0$, die noch auf Ω der Bedingung

$$(21)\quad \frac{\partial v}{\partial n} = F(u)$$

genügt. Wir zeigen, daß v sich von u nur um eine Konstante unterscheiden kann. Es ist, falls p' und p'' ihre frühere Bedeutung haben,

$$v(p') - v(p'') = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega (G_2(p',q) - G_2(p'',q))\, F(u)\, d\sigma_q,$$

$$u_{n_\nu}(p') - u_{n_\nu}(p'') = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega (G_2(p',q) - G_2(p'',q))\, F_{n_\nu}(u_\nu)\, d\sigma_q,$$

$$v(p') - u_{n_\nu}(p') - (v(p'') - u_{n_\nu}(p'')) =$$
$$= -\int_\Omega [G_2(p', q) - G_2(p'', q)][F(u) - F_{n_\nu}(u_\nu)]\, d\sigma_q.$$

urch Grenzübergang $\nu \to \infty$ ergibt sich nun

$$v(p') - u(p') = v(p'') - u(p''),$$

oraus die Behauptung folgt. Es ist also infolge (21)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = F(u).$$

iermit ist also unsere Randwertaufgabe auch unter den oben angeführten lgemeineren Voraussetzungen über $F(u)$ gelöst. Das gewonnene Resultat ssen wir folgendermaßen zusammen: *Es sei $F(u)$ eine stetige zunehmende unktion von u, die noch den Bedingungen*

$$F(0) \leqq 0; \quad \lim_{u=\infty} F(u) = \infty$$

enügt. Dann gibt es eine und nur eine positive Lösung der Gleichung $u = 0$, die in einem Punkte P innerhalb einer geschlossenen stetig ekrümmten Fläche Ω wie $\frac{1}{r_P}$ singulär wird, aber sonst regulär verläuft, nd auf Ω der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = F(u)$$

enügt.

Es ist physikalisch evident, daß eine Vergrößerung von $F(u)$ eine rniedrigung der Temperatur u zur Folge hat. Dieses läßt sich folgenermaßen analytisch beweisen. Es sei u_1 die zur Ausstrahlungsfunktion $_1(u)$

22) $$(F_1(u) > F(u))$$

ehörige Temperatur. Wir zeigen, daß das Minimum von $u - u_1$ positiv t. In dem Punkte p, wo dieses Minimum erreicht wird, würden wir ach einer bekannten Eigenschaft der harmonischen Funktionen

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geqq \frac{\partial u_1}{\partial n} \quad \text{haben.}$$

olglich

$$F(u) \geqq F_1(u_1).$$

lso nach (22)

$$F(u) \geqq F_1(u_1) > F(u_1),$$
$$u - u_1 > 0.$$

(Eingegangen am 17. Januar 1920.)

Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete.

Von

Marie Torhorst in Bonn.

Die folgenden Untersuchungen, die einen Teil meiner Bonner Dissertation wiedergeben, beschäftigen sich mit dem Rande ebener, einfach zusammenhängender, geschränkter Gebiete. Es werden in Beziehung gesetzt: der von C. Carathéodory[1]) eingeführte Begriff der *Primenden*, der von A. Schoenflies[2]) eingeführte Begriff der *allseitigen Erreichbarkeit*, der von H. Hahn[3]) eingeführte Begriff des *Zusammenhanges im kleinen*. Von den Resultaten seien hervorgehoben die Sätze: In einem Primende kann es höchstens drei allseitig erreichbare Punkte geben, und höchstens zwei Punkte, in denen der Rand zusammenhängend im kleinen ist. Die drei Aussagen: „Alle Randpunkte sind allseitig erreichbar", „Der Rand ist zusammenhängend im kleinen" und „Der Rand besteht nur aus Primenden erster Art" werden als völlig gleichbedeutend erwiesen. Jede dieser drei Aussagen stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß der Rand eine stetige Kurve sei.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Lehrsätze.

(1). Unter einer *offenen Punktmenge* verstehen wir das Komplement einer abgeschlossenen Menge.

(2). Eine abgeschlossene Menge heiße *zusammenhängend*, wenn sie nicht Vereinigung zweier zueinander fremder abgeschlossener Mengen ist: eine

[1]) Math. Ann., 73 (1913), S. 321–370.

[2]) Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Zweiter Teil, Leipzig 1908, S. 176.

[3]) Jahresber. d. Math. Ver., 23 (1914), S. 318–322; Sitzungsber. d. Akad. Wien 123, Abt. IIa (1914), S. 2433 ff.

ffene Menge heiße zusammenhängend, wenn sie nicht Vereinigung zweier ueinander fremder offener Mengen ist.

Ein einzelner Punkt ist eine spezielle zusammenhängende abgeschlossene Ienge.

(3). Wir sagen: eine geschränkte zusammenhängende abgeschlossene Ienge *verbindet zwei Punkte*, wenn sie die beiden Punkte enthält.

(4). Eine zusammenhängende offene Menge nennen wir ein *Gebiet*.

(5). Ein geschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ in der Ebene wird *einfach zusammenängend* genannt, wenn jedes geschlossene Polygon, das in $\mathfrak{G}$ verläuft, in einem Innern nur Punkte von $\mathfrak{G}$ enthält.

Da wir es im folgenden fast ausschließlich mit solchen geschränkten, einfach-zusammenhängenden Gebieten zu tun haben, so werden wir, falls nicht das Gegenteil bemerkt ist, diese kurz als *Gebiete* bezeichnen.

(6). In gewohnter Weise bezeichnen wir als *Randpunkt* eines Gebietes $\mathfrak{G}$ eden Häufungspunkt von $\mathfrak{G}$, der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehört, und als *Rand* von $\mathfrak{G}$ lie Menge aller Randpunkte von $\mathfrak{G}$; sie wird im folgenden stets mit $\mathfrak{r}$ ezeichnet. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist abgeschlossen.

(7). Als *Streckenzug* in der Ebene soll im folgenden die Vereinigung on endlich oder abzählbar unendlich vielen (abgeschlossenen) Strecken $\overline{\alpha_n\alpha_{n+1}}$ ($n = 1, 2, \ldots l$; oder $n = 1, 2, \ldots$; oder $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ezeichnet werden mit folgenden Eigenschaften:

(a). je zwei Strecken $\overline{\alpha_n\alpha_{n+1}}$ und $\overline{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}$ haben nur den Punkt α_{n+1} emeinsam; je zwei Strecken $\overline{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ und $\overline{\alpha_j\alpha_{j+1}}$ haben, wenn etwa $j > i$ nd $j \neq i+1$ ist, keinen Punkt gemeinsam; doch kann $\alpha_1 = \alpha_{l+1}$ sein, wenn er Streckenzug endlich viele Strecken enthält;

(b). für $n = 1, 2, \ldots$ soll die Menge der Eckpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ ur einen Häufungspunkt α besitzen; es kann $\alpha_1 = \alpha$ sein. Für $= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sollen die beiden Folgen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, und $_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots, \alpha_{-n}, \ldots$ je nur einen Häufungspunkt α und $\bar{\alpha}$ besitzen; es ann $\alpha = \bar{\alpha}$ sein.

(8). Je zwei Punkte eines Gebietes $\mathfrak{G}$ lassen sich durch einen Streckenzug ndlicher Streckenzahl verbinden, der in $\mathfrak{G}$ verläuft. Wir wollen einen lerartigen Streckenzug einen *Weg* im Gebiet $\mathfrak{G}$ nennen und ihn mit $\mathfrak{w}$ ezeichnen.

(9). Unter einem *Einschnitt* in $\mathfrak{G}$ verstehen wir einen Streckenzug in $\mathfrak{G}$, der einen innern Punkt γ von $\mathfrak{G}$ mit einem Randpunkt ϱ verbindet; s kann dabei vorkommen, daß dieser Streckenzug unendlich viele Strecken nthält, doch nur unter der Bedingung, daß ϱ der einzige Häufungspunkt einer Eckpunkte ist. Wir nennen γ den Anfangspunkt und ϱ den Endunkt des Einschnitts. — Der Einschnitt sei mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet; dabei soll lie Punktmenge $\mathfrak{e}$ die Punkte γ und ϱ ausschließen.

(10). Jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$, der mit einem inneren Punkt durch einen Einschnitt verbunden werden kann, wird ein *für* $\mathfrak{G}$ *erreichbarer* Punkt genannt.

(11). Die für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkte bilden eine zur Menge $\mathfrak{r}$ aller Randpunkte dicht liegende Punktmenge[4]).

(12). Ein in $\mathfrak{G}$ verlaufender Streckenzug, der zwei Randpunkte ϱ_1 und ϱ_2 von $\mathfrak{G}$ verbindet und dessen Eckpunkte, falls er aus unendlich vielen Strecken besteht, sich höchstens in den beiden Punkten ϱ_1 und ϱ_2 häufen, heißt ein *Querschnitt* von $\mathfrak{G}$. Die Punkte ϱ_1 und ϱ_2 werden die Endpunkte des Querschnitts genannt; sie können identisch sein. — Der Querschnitt sei mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet; die Punktmenge $\mathfrak{q}$ soll die beiden Punkte ϱ_1 und ϱ_2 ausschließen.

(13). Auf jedem Polygon, das in seinem Innern einen Punkt des Randes von $\mathfrak{G}$ und nicht das ganze Gebiet $\mathfrak{G}$ enthält, gibt es mindestens einen und höchstens abzählbar unendlich viele Querschnitte von $\mathfrak{G}$.

(14). Jeder Querschnitt $\mathfrak{q}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ zerlegt $\mathfrak{G}$ in zwei zueinander fremde Gebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$[5]), und es gilt die Beziehung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{G}'' + \mathfrak{q}$. — Jeder Weg in $\mathfrak{G}$, der einen Punkt aus $\mathfrak{G}'$ mit einem Punkt aus $\mathfrak{G}''$ verbindet, hat mindestens einen Punkt mit dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ gemeinsam[6]). — Die Endpunkte des Querschnitts $\mathfrak{q}$ gehören zum Rande jedes der beiden Gebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$; *jeder, von den beiden Endpunkten von* $\mathfrak{q}$ *verschiedene, Punkt des Randes von* $\mathfrak{G}$ *ist in der Randmenge von mindestens einem der beiden Teilgebiete enthalten.*

(15). *Jede geschränkte zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge* $\mathfrak{C}$, *die einen Punkt* γ *aus* $\mathfrak{G}$ *und einen nicht zu* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Punkt* ν *verbindet, hat mindestens einen Punkt mit dem Rande* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gemeinsam.*

Ist ν ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, dann ist der Satz gewiß richtig. — Es sei ν kein Randpunkt; angenommen, es gebe eine Punktmenge $\mathfrak{C}$ der angegebenen Art, die zur abgeschlossenen Menge $\mathfrak{r}$ fremd ist. Es gibt dann ein Polygon $\mathfrak{p}$, das in seinem Innern $\mathfrak{P}$ die Menge $\mathfrak{C}$ enthält, während die Menge $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{P}$ fremd ist. Man denke sich in $\mathfrak{P}$ von γ aus einen Streckenzug $\mathfrak{w}$ konstruiert, der im Punkte ν endigt. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist eine abgeschlossene Punktmenge; daher und weil der Endpunkt ν von $\mathfrak{w}$ außerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegt, müßte es auf $\mathfrak{w}$ einen ersten Punkt geben, der zum Rande $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ gehört. Das ist aber nicht möglich, da $\mathfrak{w}$ zu $\mathfrak{P}$ gehört und die Menge $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{r}$ fremd ist. — Unsere Annahme, daß die Menge $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{r}$ fremd sei, führt also auf einen Widerspruch; damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[4]) Vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914. S. 347.

[5]) Carathéodory, a. a. O. S. 328.

[6]) Carathéodory, a. a. O. S. 328 u. 329.

(16). *Es sei* $\mathfrak{G}$ *durch den Querschnitt* $\mathfrak{q}$ *zerlegt in die beiden Teilgebiete* $\mathfrak{G}'$ *und* $\mathfrak{G}''$, *und es sei* $\mathfrak{t}$ *eine die beiden Endpunkte von* $\mathfrak{q}$ — die auch zusammenfallen können — *verbindende zusammenhängende abgeschlossene Menge, die zu* $\mathfrak{G}'$ *fremd ist. Dann ist die Menge* $\overline{\mathfrak{G}}$ *aller derjenigen nicht zu* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *gehörigen Punkte, die mit einem Punkte von* $\mathfrak{G}'$ *durch einen zu* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *fremden Streckenzug verbunden werden können, ein — nicht notwendig geschränktes — zu* $\mathfrak{G}''$ *fremdes Gebiet.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}'$ die Randmenge von $\mathfrak{G}'$. Falls der Durchschnitt $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$ Teil von $\mathfrak{t}$ ist, so wird offenbar $\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}'$, und die Behauptung ist bewiesen. — Wenn hingegen $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$ nicht Teil von $\mathfrak{t}$ ist, so sei ϱ' ein Punkt von $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$, der nicht zu $\mathfrak{t}$ gehört; wir umgeben ihn mit einem Polygon $\mathfrak{p}'$, das samt seinem Innern zu $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ fremd ist. Nach (13) gibt es auf $\mathfrak{G}'$ einen Querschnitt von $\mathfrak{G}'$, der offenbar auch ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ ist. Auf diesem Querschnitt nehmen wir einen Punkt γ' aus $\mathfrak{G}'$ an und verbinden ihn mit einem Punkte γ'' aus $\mathfrak{G}''$ durch einen Weg $\mathfrak{w}$, der mit $\mathfrak{q}$ nur einen einzigen Punkt ε gemeinsam hat. Wir behaupten: jeder Weg zwischen γ' und γ'' enthält mindestens einen Punkt von $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$. Denn angenommen, es gebe einen γ' und γ'' verbindenden Weg $\mathfrak{w}'$, der zu $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ fremd ist; dieser kann dann ohne weiteres so abgeändert werden, daß er auch zu $\mathfrak{w}$ fremd ist; dann bildet die Menge $\mathfrak{w}+\mathfrak{w}'+\gamma'+\gamma''$ ein Polygon $\mathfrak{p}'$, das mit der Menge $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ nur den Punkt ε gemeinsam hat. Da nun der Weg $\mathfrak{w}$ den Querschnitt $\mathfrak{q}$ im Punkte ε durchsetzt, gibt es auf $\mathfrak{q}$ einen Punkt ε_1 im Innern $\mathfrak{P}'$ des Polygons $\mathfrak{p}'$ und einen Punkt ε_2 außerhalb der Menge $\mathfrak{P}'+\mathfrak{p}'$. Man lasse aus $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ das Innere der Strecke $\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ fort; die übrigbleibende zusammenhängende abgeschlossene Menge würde nun einen Punkt ε_1 aus dem Innern des Polygons $\mathfrak{p}'$ mit einem Punkt ε_2 aus dem Äußern des Polygons $\mathfrak{p}'$ verbinden, ohne einen Punkt mit $\mathfrak{p}'$ gemeinsam zu haben, was nach (15) unmöglich ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}''$ fremd ist. Daß $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Gebiet ist, liegt auf der Hand.

(17). *Das in* (16) *definierte Gebiet* $\overline{\mathfrak{G}}$ *enthält alle nicht zur Menge* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *gehörigen Randpunkte von* $\mathfrak{G}'$, *schließt dagegen alle Randpunkte von* $\mathfrak{G}''$ *aus. Der Rand von* $\overline{\mathfrak{G}}$ *ist in der Menge* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *enthalten.*

(18). Die Begriffe *Querschnittskette* und *Gebietskette* werden im folgenden in der von Carathéodory eingeführten Form benutzt[7]). — Eine Querschnittskette wird mit $[\mathfrak{q}_n]$, die zugehörige Gebietskette mit $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ und die Randmenge des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ mit $\mathfrak{r}_n$ bezeichnet.

(19). Wir sagen: *Die Querschnittskette* $[\mathfrak{q}_n]$ *konvergiert gegen den Punkt*

[7]) Carathéodory, a. a. O. S. 331.

ϱ, falls die Grenzmenge[8]) aller Mengen $\mathfrak{q}_n$ als einzigen Punkt den Punkt ϱ enthält; *die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *konvergiert gegen den Punkt* ϱ, falls die Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$ als einzigen Punkt den Punkt ϱ enthält.

(20). Der Begriff *Primende*[9]) wird ebenfalls in der von Carathéodory eingeführten Form übernommen.

(a). Wir sagen: *Das durch die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *definierte Primende* P *von* $\mathfrak{G}$ *gehört zu einem der beiden durch einen Querschnitt bestimmten Teilgebiete von* $\mathfrak{G}$, falls für irgendeine Zahl n das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ der Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ in diesem Teilgebiet enthalten ist.

(b). Ist $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ eine das Primende P von $\mathfrak{G}$ definierende Gebietskette und ist $\{\gamma_m\}$ eine Punktfolge in $\mathfrak{G}$ derart, daß in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ fast alle Punkte der Folge liegen, so wollen wir sagen: *Die Punktfolge* $\{\gamma_m\}$ *konvergiert gegen das Primende* P.

(c). *Ein Punkt ist in dem durch die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *definierten Primende* P *von* $\mathfrak{G}$ *enthalten*, wenn dieser Punkt für jedes n in der Randmenge $\mathfrak{r}_n$ von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten ist.

(21). Die Menge aller Punkte, die in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten sind, ist identisch mit der Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{r}_n$. Diese Grenzmenge ist gleichzeitig der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$, und auch der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{r}_n$.

(22). Die Menge aller Punkte in einem Primende ist zusammenhängend und abgeschlossen[10]).

(23). Sind P und P' zwei voneinander verschiedene Primenden von $\mathfrak{G}$ und sind $[\mathfrak{q}_n]$ und $[\mathfrak{q}'_n]$ zwei Querschnittsketten, die P und P' definieren, so sind für fast alle n die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ und $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}'_n}$ zueinander fremd.

(24). *Jeder Punkt* ϱ *des Randes* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist in mindestens einem Primende von* $\mathfrak{G}$ *enthalten.*

Man bestimme in $\mathfrak{G}$ eine gegen ϱ konvergierende Punktfolge $\{\gamma_m\}$. In dieser Punktfolge gibt es eine Teilfolge $\{\gamma'_m\}$, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Ist $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ eine das Primende P definierende Gebietskette, so sind in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ fast alle Punkte der Folge $\{\gamma'_m\}$ enthalten. Der Grenzpunkt ϱ dieser Folge $\{\gamma'_m\}$ gehört daher zu jeder Menge $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$. Nach (21) ist der Punkt ϱ also im Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten.

(25). Ein Punkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ wird *einfach* genannt, wenn

[8]) Als *Grenzmenge* einer Mengenfolge $\mathfrak{M}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wird bezeichnet die Menge aller derjenigen Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte aus unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}_n$ liegen (vgl. Zoretti Encycl. des sc. math., II_2, S. 145.)

[9]) Carathéodory, a. a. O. S. 336.

[10]) Vgl. Zoretti, a. a. O.

r in nur einem Primende von $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Jeder Punkt des Randes r, er nicht einfach ist, heißt *mehrfacher* Punkt.

(26). Es sei in $\mathfrak{G}$ ein Einschnitt e mit dem Endpunkt ϱ gegeben. Vir betrachten alle möglichen Punktfolgen, die auf e gegen ϱ konvergieren, nan beweist leicht, daß alle diese Punktfolgen gegen ein und dasselbe rimende von $\mathfrak{G}$ konvergieren, das wir das *dem Einschnitt zugeordnete Primende* nennen wollen.

(27). *In dieser Weise sind jedem Querschnitt* q *von* $\mathfrak{G}$ *zwei Primenden ugeordnet.* Sind diese beiden Primenden identisch, so nennen wir q einen *Rückkehrschnitt.*

(28). Ist ϱ der Endpunkt eines Einschnitts e von $\mathfrak{G}$ und ist P das em Einschnitt e zugeordnete Primende von $\mathfrak{G}$, so nennen wir ϱ einen *ür das Primende P erreichbaren Punkt.*

(29). Ein Primende enthält höchstens einen für das Primende erreicharen Punkt[11]).

(30). Nach Carathéodory gilt der Satz: Jedes Primende P von $\mathfrak{G}$ kann efiniert werden durch eine *gegen einen Punkt* ϱ *von* P *konvergierende* uerschnittskette[12]).

(31). Alle Punkte ϱ in einem Primende, gegen die mindestens eine as Primende definierende Querschnittskette konvergiert, heißen *Hauptunkte* des Primendes; alle übrigen Punkte werden *Nebenpunkte* genannt.

(32). *Ein Primende mit erreichbarem Punkt wird ein Primende erster ler zweiter Art* genannt, je nachdem es nur einen einzigen Punkt oder nendlich viele Punkte enthält. In einem Primende zweiter Art gibt es nen Hauptpunkt und unendlich viele Nebenpunkte.

Ein Primende ohne erreichbaren Punkt wird ein Primende dritter ler vierter Art genannt, je nachdem es nur Hauptpunkte oder Hauptnd Nebenpunkte enthält.

(33). Ein Punkt ϱ des Randes r von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann erichbar für $\mathfrak{G}$, wenn es mindestens ein Primende erster oder zweiter Art bt, für das der Punkt ϱ erreichbarer Punkt ist.

(34). *Ist* q *ein Querschnitt von* $\mathfrak{G}$, *der kein Rückkehrschnitt ist, so bt es zu jedem der beiden durch* q *bestimmten Teilgebiete mindestens n Primende von* $\mathfrak{G}$, *das zu diesem Teilgebiet gehört.*

Es möge der Querschnitt q mit den Endpunkten ϱ_1 und ϱ_2 in $\mathfrak{G}$ die iden Teilgebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ bestimmen. Man zerlege q durch einen iner Punkte ε in zwei Einschnitte e_1 und e_2; $P^{(1)}$ sei das dem Einschnitt e_1, $^{2)}$ das dem Einschnitt e_2 zugeordnete Primende; $[q_n^{(1)}]$ sei eine Quer-

[11]) Carathéodory, a. a. O. S. 353.
[12]) Carathéodory, a. a. O. S. 343.

schnittskette, die das Primende $P^{(1)}$ definiert. Man kann annehmen, daß keiner der Querschnitte $q_n^{(1)}$ einen Endpunkt mit q gemeinsam hat.

Da q kein Rückkehrschnitt ist, sind die beiden Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ voneinander verschieden; daher wird offenbar für ein genügend großes n die Menge $e_2 + \varepsilon$ zum Gebiete $\mathfrak{G}_{q_n^{(1)}}$ fremd sein. Die das Primende $P^{(1)}$ definierende Querschnittskette $[q_n^{(1)}]$ läßt sich nun ohne weiteres durch eine andere ersetzen — sie sei wiederum mit $[q_n^{(1)}]$ bezeichnet —, so daß alle Querschnitte der neuen Kette im ursprünglichen Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n^{(1)}}$ verlaufen, also zu $e_2 + \varepsilon$ fremd sind, während jeder von ihnen vom Einschnitt e_1 in einem und nur einem Punkt ε_n durchsetzt wird; ferner hat keiner der neuen Querschnitte einen Endpunkt mit q gemeinsam. Der Punkt ε_n zerlegt jeden der neuen Querschnitte $q_n^{(1)}$ von $\mathfrak{G}$ in zwei Einschnitte von $\mathfrak{G}$, von denen der eine — e_n' — ganz im Gebiete $\mathfrak{G}'$, der andere — e_n'' — ganz im Gebiete $\mathfrak{G}''$ verläuft. Das dem Einschnitt e_n' zugeordnete Primende P' von $\mathfrak{G}$ ist, da der Querschnitt $q_n^{(1)}$ keinen Endpunkt mit q gemeinsam hat, von den Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ verschieden. P' gehört daher zu einem und nur einem der beiden durch q bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$; zum Gebiet $\mathfrak{G}''$ kann P' nicht gehören: denn alle Punktfolgen, die auf dem Einschnitt e_n' gegen das Primende P' konvergieren, sind Punktfolgen aus $\mathfrak{G}'$ und können nicht gleichzeitig gegen ein zu $\mathfrak{G}''$ gehöriges Primende konvergieren. Das Primende P' von $\mathfrak{G}$ gehört also zu $\mathfrak{G}'$. — In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß das dem Einschnitt e_n'' zugeordnete Primende von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}''$ gehört.

Anmerkung: (a). Der Beweis zeigt, daß es, falls q kein Rückkehrschnitt ist, zu jedem der beiden Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört.

(b). Falls der Querschnitt q kein Rückkehrschnitt ist, gibt es auf dem Rande jedes der beiden Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens einen Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, der von den Endpunkten des Querschnitts q verschieden ist.

(35). Wir sagen: *Die Folge von Primenden $\{P_m\}$ konvergiert gegen das Primende P,* wenn fast alle Primenden der Folge zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ einer das Primende P definierenden Gebietskette gehören.

(36). Es sei $\{P_m\}$ eine Folge von Primenden von $\mathfrak{G}$, die gegen das Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_m$ die Menge aller im Primende P_m enthaltenen Punkte und mit $\mathfrak{m}$ die Menge aller im Primende P enthaltenen Punkte, *so ist die Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{m}_m$ in der Menge $\mathfrak{m}$ enthalten.*

Es sei $[\mathfrak{G}_{q_n}]$ eine das Primende P definierende Gebietskette. Das Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ enthält fast alle Primenden P_m; daher enthält die Menge $\mathfrak{r}_n$ fast alle Mengen $\mathfrak{m}_m$. In $\mathfrak{r}_n$ ist also auch die Grenzmenge aller Mengen

$_n$ enthalten, und diese ist daher im Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{r}_n$, d. h. der Menge $\mathfrak{m}$ enthalten.

(37). Wählt man aus jeder Menge $\mathfrak{m}_m$ einen Punkt ϱ_m aus, so enthält die Punktfolge $\{\varrho_m\}$ eine Teilfolge, die gegen einen Punkt ϱ des Primendes P konvergiert.

(38). Ist irgendeine Menge $\{P\}$ von Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}$ gegeben und ist $\{\overline{P}\}$ eine ihrer Teilmengen, so soll *die Menge* $\{\overline{P}\}$ *dicht zur gegebenen Menge* $\{P\}$ *heißen*, wenn es zu jedem Primende P der gegebenen Menge, das nicht schon zur Menge $\{\overline{P}\}$ gehört, eine Folge von Primenden aus der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, die gegen das Primende P konvergiert.

(39). *Eine Menge* $\{\overline{P}\}$ *von Primenden des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann dicht zur Menge aller Primenden von* $\mathfrak{G}$, *wenn es zu jedem durch einen Querschnitt* $\mathfrak{q}$ *bestimmten Teilgebiet von* $\mathfrak{G}$, *falls* $\mathfrak{q}$ *kein Rückkehrschnitt ist, mindestens ein Primende von* $\mathfrak{G}$ *gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört.*

Besteht die Menge $\{\overline{P}\}$ aus allen Primenden von $\mathfrak{G}$, dann ist die Behauptung gewiß richtig. Dieser besondere Fall sei im folgenden ausgeschlossen.

(a). Angenommen, eine Menge $\{\overline{P}\}$ sei dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{q}$ sei ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist. Es wird behauptet, daß es zu jedem durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende $\overline{P}$ der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört. — Es sei $\mathfrak{G}'$ eines der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete. Da $\mathfrak{q}$ kein Rückkehrschnitt ist, gibt es mindestens ein Primende P von $\mathfrak{G}$, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört. Enthält die Menge $\{\overline{P}\}$ das Primende P, dann ist unsere Behauptung richtig. Gehört P der Menge $\{\overline{P}\}$ nicht an, so bestimme man in $\mathfrak{G}$ eine P definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n]$ derart, daß für ein genügend großes n ein Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ der Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ in $\mathfrak{G}'$ enthalten ist. Da die Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$, gibt es eine Folge von Primenden $\{\overline{P}_m\}$ aus der Menge $\{\overline{P}\}$, die gegen das Primende P konvergiert. Fast alle Primenden dieser Folge gehören zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ und, da $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ im Gebiet $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, auch zum Gebiet $\mathfrak{G}'$. Es gibt also gewiß in der Menge $\{\overline{P}\}$ ein Primende, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört.

(b). Es sei $\{\overline{P}\}$ irgendeine Menge von Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}$; und es sei bekannt, daß es zu jedem durch einen Querschnitt $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört. Es wird behauptet, daß die Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$. — Es sei P ein beliebiges Primende von $\mathfrak{G}$, das nicht schon zur Menge $\{\overline{P}\}$ gehört. Dann gibt es nach Voraussetzung zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ einer Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$, die das Primende P

definiert, ein Primende $\overline{P}_n$ aus der Menge $\{\overline{P}\}$, das zu $\mathfrak{G}_{q_n}$ gehört. Die Folge $\{\overline{P}_n\}$ von Primenden konvergiert gegen das Primende P, denn fast alle Primenden dieser Folge gehören zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$. Die Menge $\{\overline{P}\}$ ist also dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

(40). Aus Anmerkung (a) zu (34) folgt eine wichtige Ergänzung zu Satz (11): *Die Menge aller Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ ist dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.*

(41). *Ist $\mathfrak{q}$ ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist, so gibt es auf dem Rande jedes der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens einen für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkt.*

Anmerkung: Dies kann nicht ohne weiteres aus Satz (11) gefolgert werden, wie folgendes Beispiel zeigt: In Figur 1 ist die Randmenge $\mathfrak{r}$ eines einfach-zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}$ angedeutet und ein Querschnitt $\mathfrak{q}$ gezeichnet, der aus der Verbindungsstrecke der beiden Randpunkte ϱ_1 und ϱ_2 besteht. Das eine der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ — es sei mit $\mathfrak{G}'$ bezeichnet — besteht aus der Menge aller Punkte im Innern des Quadrates mit den vier Eckpunkten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4. — Es gibt nun, wie man unmittelbar einsieht, auf dem Rande $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{r}$ dicht liegende Menge von Punkten, die zum Rande $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{G}'$ fremd ist.

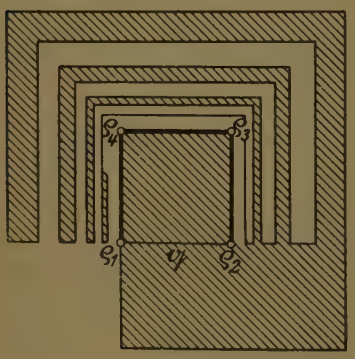

Fig. 1.

(42). Satz (40) läßt sich verschärfen: Es gibt eine Menge von *abzählbar* unendlich vielen Primenden erster oder zweiter Art, die dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l, \ldots$ eine Menge von abzählbar unendlich vielen Punkten des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die dicht ist zur Menge $\mathfrak{r}$. Zu jedem dieser Punkte als Mittelpunkt denke man sich Kreise mit den Radien $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots$ konstruiert und jedem der Kreise ein regelmäßiges Polygon einbeschrieben, das außerhalb des nächstfolgenden Kreises verläuft. Auf diese Weise erhält man abzählbar unendlich viele Polygone $\mathfrak{p}_{l,m}$. Auf jedem dieser Polygone gibt es für ein genügend großes m nach (13) mindestens einen und höchstens abzählbar unendlich viele Querschnitte von $\mathfrak{G}$; jedem Querschnitt sind zwei Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ zugeordnet. Die Gesamtheit aller Polygone $\mathfrak{p}_{l,m}$ bestimmt daher eine Menge von abzählbar unendlich vielen Primenden $\{\overline{P}\}$; es soll nun gezeigt werden, daß diese Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$. — Es sei $\mathfrak{q}$ mit den Enden

ınkten ϱ_1 und ϱ_2 ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist, ıd $\mathfrak{G}'$ sei eins der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Dann ɔt es nach der Anmerkung (b) zu (34) auf dem Rande $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{G}'$ einen ınkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, der von den Endpunkten von $\mathfrak{q}$ verschieden . Es sei a der Abstand des Punktes ϱ von der Menge $\mathfrak{q} + \varrho_1 + \varrho_2$. ir $\frac{1}{m} < a$ sei ein Punkt ϱ_l so gewählt, daß der Abstand der beiden Punkte und ϱ kleiner als $\frac{1}{m+1}$ ist; dann liegt der Randpunkt ϱ von $\mathfrak{G}'$ im nern des Polygons $\mathfrak{p}_{l,m}$, das selbst zur Menge $\mathfrak{q} + \varrho_1 + \varrho_2$ fremd ist. ıch (13) gibt es auf $\mathfrak{p}_{l,m}$ mindestens einen Querschnitt $\mathfrak{q}'$ des Gebietes '. Da das Polygon $\mathfrak{p}_{l,m}$ keinen Punkt mit dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{G}$ meinsam hat, muß $\mathfrak{q}'$ gleichzeitig ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ sein. Die beiden m Querschnitt $\mathfrak{q}'$ zugeordneten Primenden von $\mathfrak{G}$ sind in der Menge $\{\overline{P}\}$ thalten und gehören zum Gebiet $\mathfrak{G}'$. — Es gibt also mindestens ein imende in der Menge $\{\overline{P}\}$, das zum Gebiet $\mathfrak{G}'$ gehört; die Menge $\{\overline{P}\}$ also nach (39) dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

§ 2.

Folgerungen aus der zyklischen Anordnung der Primenden.

(43). Wie Carathéodory aus der Theorie der konformen Abbildung folgert hat, *sind die Primenden eines Gebietes $\mathfrak{G}$ zyklisch geordnet*[13]). ese Tatsache, für die ich an anderer Stelle einen elementaren, von der eorie der konformen Abbildung unabhängigen, Beweis erbringen werde, nn auf folgende Weise formuliert werden:

Es gibt eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Primenden ıes Gebietes $\mathfrak{G}$ auf die Punkte einer Kreislinie.

Unter der Stetigkeit der Abbildung ist dabei folgendes verstanden: $\{P_m\}$ eine Folge von Primenden, die gegen das Primende P konver- ırt, und sind $\{z_m\}$ und z die diesen Primenden zugeordneten Punkte der eislinie, so gilt $\lim_{m=\infty} z_m = z$ und umgekehrt.

(44). Denken wir uns in gewohnter Weise die Punkte der Kreislinie ıkehrbar eindeutig und stetig auf die reellen Zahlen $0 \leqq z < 1$ abgebildet d betrachten wir reelle Zahlen, die zueinander nach dem Modul 1 kon- ıent sind, als gleichwertig, so erhalten wir damit *eine Abbildung aller imenden von $\mathfrak{G}$ auf die reellen Zahlen*, bei der einem und demselben imende die Menge aller nach dem Modul 1 zu einer bestimmten Zahl ngruenten Zahlen entspricht.

[13]) Carathéodory, a. a. O. S. 350.

(45). Durch Berufung auf den Satz von Bolzano von der Existenz eines Häufungswertes folgern wir daraus: *Ist irgendeine Menge von unendlich vielen Primenden von $\mathfrak{G}$ gegeben, so ist in dieser Menge mindestens eine Folge von Primenden enthalten, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert.*

(46). Die Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$, die den Punkten eines Kreisbogens entsprechen, soll ein *Intervall von Primenden*[14]) genannt werden; und zwar nennen wir ein Intervall von Primenden *abgeschlossen*, wenn der entsprechende Kreisbogen abgeschlossen ist, und *offen*, wenn der entsprechende Kreisbogen offen ist.

Die abgeschlossenen Intervalle von Primenden werden abgebildet auf Zahlen-Intervalle $a \leqq z \leqq b$ und die offenen Intervalle von Primenden auf Zahlen-Intervalle $a < z < b$, wobei $0 < b - a < 1$ ist.

(47). *Wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch einen Querschnitt $\mathfrak{q}$ in zwei Teilgebiete zerlegt, so bildet die Gesamtheit aller Primenden von $\mathfrak{G}$, die zu einem dieser beiden Teilgebiete gehören, ein offenes Intervall von Primenden.*

Es seien $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}$, der kein Rückkehrschnitt ist, zugeordneten Primenden; $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ seien die beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Alle von $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ verschiedenen Primenden von $\mathfrak{G}$ zerfallen in zwei Klassen $\{P'\}$ und $\{P''\}$, je nachdem sie zu $\mathfrak{G}'$ oder zu $\mathfrak{G}''$ gehören; dabei kann kein Primende der einen Klasse Grenze einer Folge von Primenden der andern Klasse sein. — Durch die in (43) charakterisierte Abbildung werden den beiden Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ zwei Punkte $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ der Kreislinie zugeordnet; dabei zerfallen alle übrigen Punkte der Kreislinie in zwei Klassen $\{z'\}$ und $\{z''\}$ derart, daß kein Punkt der einen Klasse Grenze einer Folge von Punkten der andern Klasse sein kann; d. h. jede der Klassen $\{z'\}$ und $\{z''\}$ bildet einen offenen Kreisbogen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(48). *Es sei $\{z\}$ eine abgeschlossene Punktmenge der Kreislinie und $\{P_z\}$ sei die entsprechende Menge von Primenden von $\mathfrak{G}$.* Bezeichnet man mit $\mathfrak{m}_z$ die Menge aller Punkte, die im Primende P_z enthalten ist, so bildet *die Vereinigung $\mathfrak{v}$ aller Mengen $\mathfrak{m}_z$ eine abgeschlossene Punktmenge.*

Wir betrachten eine beliebige konvergente Folge $\{\varrho_m\}$ von Punkten der Menge $\mathfrak{v}$; wir haben zu zeigen, daß ihr Grenzpunkt ϱ auch zur Menge $\mathfrak{v}$ gehört. — Jeder Punkt ϱ_m ist in mindestens einem Primende $P^{(m)}$ der Menge $\{P_z\}$ enthalten. Sind nur endlich viele Primenden $P^{(m)}$ voneinander verschieden, dann enthält mindestens eins von ihnen — es sei

[14]) Carathéodory, a. a. O. S. 365.

it P_{z_0} bezeichnet — unendlich viele Punkte der Folge $\{\varrho_m\}$ und daher ach (22) auch ihren Grenzpunkt ϱ. — Sind unendlich viele von den rimenden $P^{(m)}$ voneinander verschieden, so gibt es nach (45) in dieser enge eine Folge $\{P_{z_m}\}$, die gegen ein Primende P_{z_0} von $\mathfrak{G}$ konvergiert. edem Primende P_{z_m} ist ein Punkt der abgeschlossenen Menge $\{z\}$ zuordnet, und die Punktfolge $\{z_m\}$ aus der Menge $\{z\}$ konvergiert gegen nen der Menge $\{z\}$ angehörenden Punkt, der mit dem dem Primende P_{z_0} ugeordneten Punkt identisch ist. Das Primende P_{z_0} gehört also zu der it $\{P_z\}$ bezeichneten Primendenmenge. — Ist nun $[\mathfrak{q}_n]$ eine Querschnittsette, die das Primende P_{z_0} definiert, so gehören fast alle Primenden der olge $\{P_{z_m}\}$ zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$. Ist ϱ_{z_m} der im Primende P_{z_m} entaltene Punkt unserer Folge $\{\varrho_m\}$, dann gehören fast alle Punkte ϱ_{z_m} zum and $\mathfrak{r}_n$ jedes Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$. Der Grenzpunkt ϱ der Folge $\{\varrho_{z_m}\}$ ist dann jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{r}_n$, also nach (20c) auch im Primende P_{z_0} nthalten.

(49). *Ist $\{P_z\}$ die Menge aller Primenden eines abgeschlossenen Primendenintervalls, so ist die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{i}$ *aller Mengen* $\mathfrak{m}_z$ *abgeschlossen und zusammenhängend.*

Daß die Menge $\mathfrak{i}$ abgeschlossen ist, folgt aus (48).

Angenommen, die Menge $\mathfrak{i}$ wäre nun nicht zusammenhängend und ließe ich in zwei abgeschlossene, zueinander fremde Teilmengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ zergen; die beiden Mengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ haben dann einen von Null verschiedenen bstand. — Jede Menge $\mathfrak{m}_z$ ist nach (22) zusammenhängend und abgeschlossen nd daher entweder ganz in $\mathfrak{i}'$ oder ganz in $\mathfrak{i}''$ enthalten. Wir wollen iejenigen Primenden des gegebenen Intervalls, deren Punkte in der Menge $\mathfrak{i}'$ nthalten sind, mit $P_{z'}$ bezeichnen, alle übrigen Primenden des Intervalls ntsprechend mit $P_{z''}$. Unserem Primendenintervall entspricht ein abeschlossener Kreisbogen; mit $\{z'\}$ sei die Menge aller den Primenden $P_{z'}$ ugeordneten Punkte und mit $\{z''\}$ die Menge aller den Primenden $P_{z'}$ ugeordneten Punkte des Kreisbogens bezeichnet. Dann gehört jeder Punkt z es Kreisbogens entweder nur zu $\{z'\}$ oder nur zu $\{z''\}$. Es gibt daher ntweder in $\{z'\}$ einen Häufungspunkt aus $\{z''\}$ oder in $\{z''\}$ einen Häufungsunkt aus $\{z'\}$. Es möge etwa zu $\{z'\}$ ein Häufungspunkt z_0' von $\{z''\}$ ehören; d. h. es möge in $\{z''\}$ eine Folge $\{z_n''\}$ geben, die gegen einen unkt z_0' von $\{z'\}$ konvergiert. Dann konvergiert die Primendenfolge $\{P_{z_n''}\}$ egen das dem Punkt z_0' zugeordnete Primende $P_{z_0'}$. Die Mengen $\mathfrak{m}_{z_n''}$ sind n der Menge $\mathfrak{i}''$ enthalten und die Menge $\mathfrak{m}_{z_0'}$ in der Menge $\mathfrak{i}'$. Nach (37) ibt es also in der Menge $\mathfrak{i}''$ eine Punktfolge, die gegen einen Punkt der Menge $\mathfrak{i}'$ konvergiert. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme, aß die beiden Mengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ einen von Null verschiedenen Abstand

haben. — Es muß also die Menge i, wie behauptet wurde, zusammenhängend sein.

(50). Wir betrachten nun nach (44) eine Abbildung aller Primenden von $\mathfrak{G}$ auf alle reellen Zahlen; dabei wollen wir die einer monoton zunehmenden bzw. abnehmenden konvergenten Zahlenfolge entsprechende Primendenfolge eine *aufsteigende* bzw. *absteigende* Primendenfolge nennen.

(51). *Jede gegen ein Primende P_0 von $\mathfrak{G}$ konvergierende Primendenfolge $\{P_{z_m}\}$ enthält eine absteigende oder aufsteigende Teilfolge.*

(52). *Zu jedem Punkt ϱ in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ gibt es eine gegen P konvergierende Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von Primenden erster oder zweiter Art, die sämtlich von P verschieden sind und deren erreichbare Punkte ϱ_n den Punkt ϱ zur Grenze haben.*

(a). Ist ϱ ein *Hauptpunkt* des Primendes P und $[\mathfrak{q}_n]$ eine gegen ϱ konvergierende Querschnittskette, die das Primende P definiert, so liefert die Menge aller den Querschnitten $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden eine solche Folge.

(b). Es sei ϱ ein *Nebenpunkt* des Primendes P. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ und eine das Primende P definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n]$, so daß alle Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ samt ihren Endpunkten zu $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ fremd sind. Der Punkt ϱ gehört als Punkt des Primendes P zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$; daher und weil die für ein Gebiet erreichbaren Punkte auf dessen Rande dicht liegen, gibt es in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ mindestens einen für das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ erreichbaren Punkt ϱ_1, wobei ϱ_1 nicht von ϱ verschieden zu sein braucht. Da $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ den Querschnitt $\mathfrak{q}_1$ ausschließt, ist ϱ_1 von den Endpunkten von $\mathfrak{q}_1$ verschieden, und einem in ϱ_1 endenden Einschnitt von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ ist also ein Primende $P^{(\varrho_1)}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ gehört. Weil der Punkt ϱ Nebenpunkt des Primendes P ist, kann das Primende $P^{(\varrho_1)}$ von $\mathfrak{G}$ in keinem Fall, ob ϱ von ϱ_1 verschieden ist oder nicht, mit dem Primende P identisch sein[15]). — Wir bestimmen nun eine zweite in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}_2(\varrho)$; da der Punkt ϱ auch zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ gehört, gibt es in $\mathfrak{U}_2(\varrho)$ einen für das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ erreichbaren Punkt ϱ_2, der wiederum nicht von ϱ verschieden zu sein braucht. Der Punkt ϱ_2 ist dann erreichbarer Punkt eines Primendes $P^{(\varrho_2)}$ erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ gehört und das vom Primende P verschieden ist. — In dieser Weise läßt sich eine Folge $\{\varrho_n\}$ von für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkten bestimmen, die den Punkt ϱ zum Grenzpunkt haben; es können dabei unendlich viele Punkte ϱ_n mit ϱ identisch sein. Die entsprechende Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ konvergiert gegen das Primende P.

[15]) Carathéodory, a. a. O. S. 334.

Anmerkung: Da in den Fällen (a) und (b) jedes Primende der Folge $P^{(\varrho_n)}\}$ von P verschieden ist, läßt sich aus der Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ stets eine Teilfolge aussondern — sie sei wieder mit $\{P^{(\varrho_n)}\}$ bezeichnet —, so daß in einer das Primende P definierenden Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n}]$ jedesmal das Primende $P^{(\varrho_n)}$ zum Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$, aber nicht zum Gebiet $\mathfrak{G}_{q_{n+1}}$ gehört.

(53). Die in (52) beschriebene Primendenfolge wollen wir *eine zum Punkte ϱ des Primendes P gehörige Primendenfolge* nennen.

(54). Gibt es zu einem Punkt ϱ im Primende P eine aufsteigende Primendenfolge, die zu ϱ gehört, so soll ϱ *rechtsseitiger Punkt im Primende* P genannt werden; gibt es eine absteigende Folge, die zu ϱ gehört, so soll ϱ *linksseitiger Punkt im Primende* P genannt werden.

(55). Nach (51) und (52) *ist jeder Punkt in einem Primende P rechtsseitiger oder linksseitiger Punkt.*

Jeder Hauptpunkt in einem Primende ist sowohl rechtsseitig als auch linksseitig. — Es sei nämlich $[q_n]$ eine das Primende P definierende Querschnittskette; z sei eine dem Primende P entsprechende Zahl und a_n und b_n seien zwei Zahlen, die den beiden dem Querschnitt q_n zugeordneten Primenden erster oder zweiter Art entsprechen. Dann lassen sich die Zahlen z, a_n und b_n und eine Zahl a so wählen, daß die Beziehung $-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < z < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1 < a$ erfüllt ist. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

§ 3.

Zusammenhang im kleinen und allseitige Erreichbarkeit.

(56). Gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ eines Punktes ϱ im Primende P von $\mathfrak{G}$ eine nach (53) zu ϱ gehörige *aufsteigende* Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$, so daß jeder Punkt ϱ_n mit ϱ verbunden werden kann durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge t_n des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten ist, so wollen wir sagen: *Im Punkte ϱ des Primendes P besteht Zusammenhang nach rechts.* Gibt es eine entsprechende *absteigende* Primendenfolge, so wollen wir sagen: *Im Punkte ϱ besteht Zusammenhang nach links.*

(57). Gibt es eine gegen das Primende P konvergierende *aufsteigende* Folge von Primenden, in deren jedem der Punkt ϱ von P als erreichbarer Punkt vorkommt, so soll *der Punkt ϱ im Primende P von rechts erreichbar* genannt werden; gibt es eine entsprechende *absteigende* Primendenfolge,

Fig. 2.

so soll ϱ *von links erreichbar* genannt werden. In Figur 2 ist $\bar{\varrho}$ de erreichbare Punkt eines Primendes zweiter Art, ϱ' und ϱ'' sind zwei seine Nebenpunkte; und zwar ist bei passend gewählter Abbildung auf die reelle Zahlen ϱ' im Primende von rechts, ϱ'' von links erreichbar.

Anmerkung: Ein von rechts oder von links erreichbarer Punkt i einem Primende ist stets ein unendlich vielfacher Punkt des Randes von $\mathfrak{G}$.

(58). Es sei ϱ ein Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ sei ein beliebig kleine Umgebung des Punktes ϱ vom Radius r_1. Läßt sich z jedem r_1 eine Zahl $r_2 > 0$ finden, so daß jeder Punkt ϱ' der Menge $\mathfrak{r}$, de der Umgebung $\mathfrak{U}_2(\varrho)$ vom Radius r_2 angehört, sich mit ϱ verbinden läß durch eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{t}'$ des Randes von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthalten ist, so wollen wir sagen: *Der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist zusammenhängend im kleinen im Punkte* ϱ [16]).

Ist der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ in jedem seiner Punkte zusammenhängend im kleinen, so wollen wir sagen: *Der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist zusammenhängend im kleinen.*

(59). *Ist in einem Punkt* ϱ *des Primendes* P *von* $\mathfrak{G}$ *der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend im kleinen, dann besteht im Punkte* ϱ *von* P *Zusammenhang nach rechts oder Zusammenhang nach links.*

Ist nämlich $\{P^{(\varrho_n)}\}$ irgendeine zum Punkte ϱ gehörige Primendenfolge und ist $\mathfrak{U}(\varrho)$ eine beliebig kleine Umgebung, so müssen, da der Rand von $\mathfrak{G}$ im Punkte ϱ zusammenhängend im kleinen ist, fast alle Punkte der Folge $\{\varrho_n\}$ sich mit ϱ verbinden lassen durch zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. — Wenn nun die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine aufsteigende Teilfolge enthält, so besteht nach (56) im Punkte ϱ von P Zusammenhang nach rechts; enthält die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine absteigende Teilfolge, so besteht im Punkte ϱ von P Zusammenhang nach links. Einer dieser beiden Fälle muß nach (51) stets eintreten.

(60). Wie später gezeigt werden wird, kann in einem Hauptpunkt eines Primendes nicht erster Art der Rand von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen sein; es kann aber in einem Primende nicht erster Art einen Hauptpunkt geben, in dem sowohl Zusammenhang nach rechts als auch Zusammenhang nach links besteht. In Figur 3 ist ϱ ein derartiger Punkt.

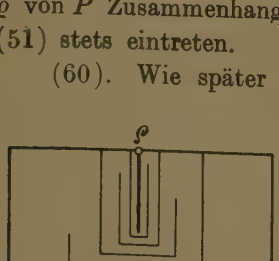

Fig. 3.

(61). Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiger Querschnitt vo

[16]) H. Hahn, a. a. O. S. 319 bzw. S. 2434.

, so gehört nach (14) jeder Punkt des Randes r von $\mathfrak{G}$ zum Rande on mindestens einem der beiden durch q bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. st nun ϱ ein Punkt der Menge r und gibt es in jedem durch einen Querchnitt q von $\mathfrak{G}$ bestimmten Teilgebiet $\mathfrak{G}'$, in dessen Randmenge der unkt ϱ enthalten ist, einen Einschnitt mit ϱ als Endpunkt, so soll der unkt ϱ *allseitig erreichbar*[17]) für $\mathfrak{G}$ genannt werden.

Anmerkung: Ein für $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbarer Punkt kann, wie Beiiele zeigen, einem Primende als nicht erreichbarer Punkt angehören n Figur 2 sind ϱ' und ϱ'' zwei derartige Punkte.

(62). *Gehört ein für $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbarer Punkt ϱ einem Primnde P als nicht erreichbarer Punkt an, so ist der Punkt ϱ in P stets on rechts oder von links erreichbar.*

Weil der Punkt ϱ, falls das Primende P von zweiter Art ist, von lem erreichbaren Punkt von P verschieden sein soll und weil ein Primnde dritter oder vierter Art unendlich viele Hauptpunkte enthält, gibt s eine das Primende P definierende Querschnittskette $[q_n]$, die gegen inen von ϱ verschiedenen Punkt konvergiert; dabei kann angenommen verden, daß die Endpunkte der Querschnitte q_n sämtlich von ϱ verschieden ind. — Der Punkt ϱ gehört als Punkt des Primendes P zum Rande edes Gebietes $\mathfrak{G}_{q_n}$; weil ϱ allseitig erreichbar ist, muß es daher in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ einen Einschnitt e_n mit ϱ als Endpunkt geben. Da die Endunkte der Querschnitte q_n sämtlich von ϱ verschieden sind, ist jedem Einschnitt e_n mit dem Endpunkt ϱ ein Primende erster oder zweiter Art $P^{(\varrho_n)}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ gehört und in dem der Punkt ϱ als sein erreichbarer Punkt enthalten ist. Jedes Primende $P^{(\varrho_n)}$ muß, da ϱ, falls P von zweiter Art sein sollte, von dem erreichbaren Punkt von P verschieden ist, von P verschieden sein. Die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ st also gewiß eine zum Punkte ϱ von P gehörige Primendenfolge; dabei ind alle Punkte der Folge $\{\varrho_n\}$ mit ϱ identisch. — Wenn die Folge $P^{(\varrho_n)}\}$ eine aufsteigende Teilfolge enthält, ist nach (57) der Punkt ϱ von P von rechts erreichbar; enthält die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine absteigende Teilfolge, lann ist der Punkt ϱ von P von links erreichbar. Nach (51) muß einer dieser beiden Fälle stets eintreten.

(63). *Es kann in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ höchstens einen Punkt geben, in dem Zusammenhang nach rechts besteht, und höchstens einen Punkt, in dem Zusammenhang nach links besteht.*

Es sei ϱ ein Punkt des Primendes P von $\mathfrak{G}$, in dem etwa Zusammenhang nach rechts besteht, und $\mathfrak{U}(\varrho)$ sei eine beliebig kleine kreisför-

[17]) A. Schoenflies, a. a. O. S. 176.

mige Umgebung von ϱ. Dann gibt es nach (56) eine zu ϱ gehörige aufsteigende Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$, so daß jeder Punkt ϱ_n sich mit ϱ verbinden läßt durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge t_n des Randes r von $\mathfrak{G}$, die ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ verläuft. Es kann dabei vorkommen, daß sich alle Mengen t_n auf den Punkt ϱ reduzieren. Wir können nun auf Grund der Anmerkung zu (52) die Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ so bestimmen, daß in einer das Primende P definierenden Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n}]$ das Primende $P^{(\varrho_n)}$ zum Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ aber nicht zum Gebiet $\mathfrak{G}_{q_{n+1}}$ gehört. Wir können nach (50) dem Primende P eine Zahl z, dem Primende $P^{(\varrho_n)}$ eine Zahl z_n, einem der beiden dem Querschnitt q_n zugeordneten Primenden die Zahl a_n so zuordnen, daß für alle n die Ungleichung besteht: $z-1 < a_n < z_n < a_{n+1} < z$. Wir wählen nun zwei beliebige natürliche Zahlen $n_1 < n_2$ und konstruieren in $\mathfrak{G}$ einen Querschnitt q_{n_1,n_2}, dem die beiden Primenden $P^{(\varrho_{n_1})}$ und $P^{(\varrho_{n_2})}$ zugeordnet sind. Durch den Querschnitt q_{n_1,n_2} wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete zerlegt, von denen das eine — es sei mit $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ bezeichnet — auf Grund der oben angegebenen Ungleichung alle Primenden desjenigen nach (47) durch den Querschnitt q_{n_1,n_2} bestimmten offenen Intervalls von Primenden enthält, das das Primende P ausschließt. Mit $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$ sei das zu $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ komplementäre Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Das Primende P gehört dann zum Gebiet $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$. Nach Voraussetzung lassen sich die beiden Punkte ϱ_{n_1} und ϱ_{n_2} mit ϱ verbinden durch zwei Teilmengen t_{n_1} und t_{n_2} des Randes r von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Die Vereinigung $t_{n_1} + t_{n_2}$ ist eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge des Randes r, die die beiden Endpunkte ϱ_{n_1} und ϱ_{n_2} des Querschnitts q_{n_1,n_2} enthält; die Menge $t_{n_1} + t_{n_2}$ kann sich unter Umständen, falls $\varrho_{n_1} = \varrho_{n_2} = \varrho$ ist, auf den Punkt ϱ reduzieren. Wir betrachten nun nach (16) die Menge $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1,n_2}$ aller nicht in der Menge $q_{n_1,n_2} + t_{n_1} + t_{n_2}$ enthaltenen Punkte der Ebene, die mit einem Punkt γ' von $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ verbunden werden können, durch einen zur Menge $q_{n_1,n_2} + t_{n_1} + t_{n_2}$ fremden Streckenzug. Nach (16) und (17) ist die Menge $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1,n_2}$ ein zum Gebiet $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$ fremdes Gebiet, das keinen Randpunkt von $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$, also auch keinen Punkt des Primendes P, enthält.

Aus dieser Tatsache läßt sich nun leicht folgern, daß der Punkt ϱ der einzige Punkt im Primende P ist, in dem Zusammenhang nach rechts besteht. Angenommen nämlich, es gebe im Primende P noch einen weiteren Punkt ϱ' dieser Art. Wir wählen zwei zueinander fremde Umgebungen $\mathfrak{U}(\varrho)$ und $\mathfrak{U}(\varrho')$. $\{P^{(\varrho'_m)}\}$ sei eine zum Punkt ϱ' von P gehörige aufsteigende Primendenfolge derart, daß jeder Punkt ϱ'_m in $\mathfrak{U}(\varrho')$ mit ϱ' verbunden werden kann durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge t'_m des Randes r von $\mathfrak{G}$. Es lassen sich nun die Zahlen m, n_1, n_2

so wählen, daß die dem Primende $P^{(\varrho'_m)}$ zugeordnete Zahl z'_m der Ungleichung genügt $z - 1 < z_{n_1} < z'_m < z_{n_2} < z$, während die im vorigen mit t_{n_1} und t_{n_2} bezeichneten Mengen in der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Das Primende $P^{(\varrho'_m)}$ gehört dann zu dem mit $\mathfrak{G}'_{n_1, n_2}$ bezeichneten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Die Teilmenge t'_m des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{U}(\varrho')$ ist zum Querschnitt q_{n_1, n_2} und zur Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$, also auch zu der in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthaltenen Vereinigung $t_{n_1} + t_{n_2}$ fremd. Der Punkt ϱ'_m ist also nicht in der Menge $q_{n_1, n_2} + t_{n_1} + t_{n_2}$ enthalten; andrerseits gehört der Punkt ϱ'_m, als Punkt des Primendes $P^{(\varrho'_m)}$ zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}'_{n_1, n_2}$. Nach (17) ist daher ϱ'_m ein Punkt des Gebietes $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$. Da ϱ'_m mit ϱ' verbunden ist durch das zu $q_{n_1, n_2} + t_{n_1} + t_{n_2}$ und mithin nach (17) auch zum Rande von $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$ fremde Kontinuum t'_m, müßte dann auch ϱ' zu $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$ gehören. Diese Folgerung steht nun im Widerspruch zu der oben bewiesenen Tatsache, daß das Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$ keinen Punkt des Primendes P enthält. Unsere Annahme, daß es im Primende P außer ϱ noch einen zweiten Punkt ϱ' gebe, in dem Zusammenhang nach rechts besteht, war falsch; und die Behauptung ist bewiesen.

(64). Im vorigen ist auch der Satz enthalten: *Es kann in einem Primende höchstens einen Punkt geben, der von rechts erreichbar ist, und höchstens einen Punkt, der von links erreichbar ist.*

(65). *Es kann in einem Primende P höchstens zwei Punkte geben, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist.*

Es muß nämlich nach (59) in jedem Punkt, in dem der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist, sei es Zusammenhang nach rechts, sei es Zusammenhang nach links bestehen. Daher ist nach (63) unsere Behauptung bewiesen.

Daß es in einem Primende wirklich zwei Punkte geben kann, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist, zeigt Fig. 2: ϱ' und ϱ'' sind zwei Punkte dieser Art.

(66). *In einem Primende zweiter Art können höchstens drei allseitig erreichbare Punkte enthalten sein.*

Sind nämlich außer dem erreichbaren Punkt des Primendes P in P noch weitere allseitig erreichbare Punkte enthalten, so muß nach (62) jeder von diesen, sei es von rechts, sei es von links erreichbar sein. Daher ist nach (64) unsere Behauptung bewiesen.

Es ist damit auch weiter gezeigt, daß, wenn in einem Primende zweiter Art drei allseitig erreichbare Punkte enthalten sind, einer von diesen der erreichbare Punkt, der andere von rechts, der andere von links erreichbar sein muß.

Daß es in einem Primende zweiter Art wirklich drei allseitig erreich-

bare Punkte geben kann, zeigt wiederum Fig. 2: ϱ, ϱ', ϱ'' sind drei allseitig erreichbare Punkte.

(67). Eine entsprechende Überlegung zeigt, *daß es in einem Primende dritter oder vierter Art höchstens zwei allseitig erreichbare Punkte geben kann.* Gibt es deren zwei, so muß der eine von rechts, der andere von links erreichbar sein.

(68). Daraus folgern wir, *daß es in einem Primende nicht erster Art unendlich viele Punkte gibt, die nicht allseitig erreichbar sind.*

(69). *Ist in dem Hauptpunkt ϱ eines Primendes P von $\mathfrak{G}$ der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen, so ist das Primende P von erster Art.*

Es sei $[\mathfrak{q}_n]$ eine Querschnittskette, die das Primende P definiert und gegen den Punkt ϱ konvergiert. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$ das zu $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ komplementäre Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Wir können dann eine Umgebung $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ so klein wählen, daß außerhalb $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ noch Punkte des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ liegen. Dann liegen auf Grund der Beziehung $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_1} < \mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_2} < \ldots < \mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n} < \ldots$ außerhalb $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ Punkte von allen Gebieten $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, und jede in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ hat die gleiche Eigenschaft. Es seien nun $P^{(\varrho_n^{(1)})}$ und $P^{(\varrho_n^{(2)})}$ die beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden mit den erreichbaren Punkten $\varrho_n^{(1)}$ und $\varrho_n^{(2)}$. Da nach Voraussetzung der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ im Punkte ϱ zusammenhängend im kleinen ist, so gibt es zu jeder Umgebung des Punktes ϱ, also auch zu jeder in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ eine Zahl n, so daß $\varrho_n^{(1)}$ und $\varrho_n^{(2)}$ sich in $\mathfrak{U}(\varrho)$ mit ϱ verbinden lassen durch zwei zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{t}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{t}_n^{(2)}$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Wir denken uns nach (16) das zu $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$ fremde Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ bestimmt, dem alle Punkte der Ebene angehören, die mit einem Punkt γ aus $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ verbunden werden können durch einen zur Menge $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ fremden Streckenzug. In $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ sind dann alle Punkte von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten. — Es sei nun dem Rande $\mathfrak{k}$ der kreisförmigen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ ein Polygon $\mathfrak{p}$ einbeschrieben, das in seinem Innern $\mathfrak{P}$ alle Punkte der Menge $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ enthält.

Wir behaupten, daß das Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ in $\mathfrak{P}$ enthalten ist: Da der Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ ganz in $\mathfrak{P}$ verläuft, gibt es in $\mathfrak{P}$ gewiß Punkte des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$, daher auch von $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$, es wird also bewiesen sein, daß $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ ganz in $\mathfrak{P}$ liegt, wenn $\mathfrak{p}$ keinen Punkt von $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ enthält. Es gibt nun, da $\mathfrak{q}_n$ in $\mathfrak{P}$ verläuft, in $\mathfrak{P}$ gewiß Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$; ferner liegen nach Annahme außerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$, daher auch im Äußeren des Polygons $\mathfrak{p}$, Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, d. h. $\mathfrak{p}$ selbst enthält Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, also Punkte, die nicht zu $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ gehören; da andrerseits die Menge $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ fremd ist, kann auf Grund der Definition des Gebietes $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ in der Menge $\mathfrak{p}$ überhaupt kein Punkt von $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten sein, wie behauptet war. Das Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ ist

so in $\mathfrak{P}$ und damit in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten; dasselbe gilt für das Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$, as einen Teil des Gebietes $\overline{\mathfrak{G}}_{q_n}$ bildet.

Es gibt demnach zu jeder beliebig kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ ein Gebiet der Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n}]$, das ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten ist; d. h. nach 19) die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n}]$ konvergiert gegen den Punkt ϱ. Das Primende P ist also von erster Art, wie behauptet war.

(70). Wir können den vorigen Satz auch in folgender Form aussprechen: *In einem Hauptpunkt eines Primendes nicht erster Art von* $\mathfrak{G}$ *kann der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *nicht zusammenhängend im kleinen sein.*

(71). *Jeder Punkt* ϱ *des Randes* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist allseitig erreichbar dann und nur dann, wenn alle Primenden von* $\mathfrak{G}$ *von erster Art sind.*

(a). Es sei bekannt, daß jeder Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbar ist. Nach (68) kann es dann in $\mathfrak{G}$ kein Primende nicht erster Art geben.

(b). Es sei bekannt, daß alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind. Dann sei ϱ ein beliebiger Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Wir haben folgendes zu zeigen: Konstruiert man in $\mathfrak{G}$ einen beliebigen Querschnitt $\mathfrak{q}$ und gehört ϱ etwa zum Rande des durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiets $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, so ist der Punkt ϱ für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Es seien ϱ_1 und ϱ_2 die Endpunkte des Querschnittes $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{r}'$ sei der Rand von $\mathfrak{G}'$. Alle Primenden von $\mathfrak{G}$ sind von erster Art; daher ist jeder von ϱ_1 und ϱ_2 verschiedene Punkt ϱ des Durchschnitts $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}'$ in einem Primende erster Art von $\mathfrak{G}$ enthalten, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört; jeder derartige Punkt ϱ ist also für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Ist ϱ einer der beiden Endpunkte von $\mathfrak{q}$, so ist ϱ in einem dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ zugeordneten Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten, das nach Voraussetzung von erster Art ist. Jede das Primende P definierende Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n}]$ konvergiert also gegen den Endpunkt ϱ von $\mathfrak{q}$; wir können uns dabei die Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ so konstruiert denken, daß jeder von ihnen den Querschnitt $\mathfrak{q}$ in einem einzigen Punkt durchsetzt. Der Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ wird dabei in zwei Teilmengen zerlegt, von denen die eine — $\mathfrak{q}_n'$ — ein Querschnitt von $\mathfrak{G}'$ ist; alle Querschnitte $\mathfrak{q}_n'$ bestimmen in $\mathfrak{G}'$ eine Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n']$, die gegen ϱ konvergiert, wobei, wie man unmittelbar einsieht, jedes Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n'}$ in dem entsprechenden Gebiet $\mathfrak{G}_{q_n}$ enthalten ist; d. h. die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{q_n'}]$ konvergiert auch gegen den Punkt ϱ, definiert also ein Primende erster Art von $\mathfrak{G}'$, das den Punkt ϱ enthält. Der Endpunkt ϱ des Querschnitts $\mathfrak{q}$ ist also auch für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(72). *Der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist zusammenhängend im kleinen dann und nur dann, wenn alle Primenden von* $\mathfrak{G}$ *von erster Art sind.*

(a). Es sei bekannt, daß der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im

kleinen ist. Da es nach (65) in jedem Primende nicht erster Art Punkte gibt, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen ist, müssen alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sein.

(b). Es sei bekannt, daß alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind. Angenommen, es gebe dann einen Punkt ϱ von $\mathfrak{r}$, in dem der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen wäre; d. h. es gebe eine Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ und eine Punktfolge $\{\varrho_m\}$ in $\mathfrak{r}$, die gegen ϱ konvergiert, wobei jeder Punkt ϱ_m mit ϱ nur verbunden werden könnte durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{r}$, die Punkte außerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthält. Jeder Punkt ϱ_m ist nach (24) in einem Primende $P^{(m)}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten. Nach (45) gibt es in der Menge aller dieser Primenden $P^{(m)}$ eine Folge — sie sei mit $\{\overline{P}^{(m)}\}$ bezeichnet —, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Ist $[\mathfrak{q}_n]$ eine das Primende P definierende Querschnittskette, so konvergiert die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$, da das Primende P von erster Art ist, gegen den im Primende P enthaltenen Punkt. Ist $\bar{\varrho}_m$ der im Primende $\overline{P}^{(m)}$ enthaltene Punkt unsrer Folge $\{\varrho_m\}$, so sind fast alle Punkte $\bar{\varrho}_m$ in der Randmenge $\mathfrak{r}_n$ jedes Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten. Der Grenzpunkt ϱ der Folge $\{\bar{\varrho}_m\}$ ist also mit dem im Primende P enthaltenen Punkt identisch. Wir betrachten nun dasjenige der beiden durch den Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ bestimmten abgeschlossenen Intervalle von Primenden, das das Primende P enthält. Die Vereinigung $\mathfrak{i}_n$ aller in den Primenden dieses Intervalls enthaltenen Punktmengen ist, da alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind, mit dem Durchschnitt $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ identisch[18]). Nach (49) ist also die Menge $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Jede Menge $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ enthält fast alle Punkte der Folge $\{\bar{\varrho}_m\}$, und fast alle Mengen $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ sind in der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten; d. h. es lassen sich entgegen unserer Annahme unendlich viele Punkte der Folge $\{\varrho_m\}$ mit ϱ verbinden durch zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Unsere Annahme, daß im Punkte ϱ der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen ist, war also falsch. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ muß zusammenhängend im kleinen sein.

(73). Nach (71) und (72) ist *jeder Punkt des Randes* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *allseitig erreichbar dann und nur dann, wenn der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend im kleinen ist.*

(74). Sowohl A. Schoenflies[19]) als H. Hahn[20]) haben notwendige

[18]) Die Identität der beiden Mengen $\mathfrak{i}_n$ und $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ wäre nämlich nur dann nicht ohne weiteres gesichert, falls ein dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordnetes Primende etwa von nicht erster Art wäre.

[19]) A. a. O. S. 237.

[20]) A. a. O. S. 2455.

ınd hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine ebene Punktnenge eine *stetige Kurve* (d. h. stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke) ei. Die Bedingungen von Schoenflies ergeben:

Damit der Rand des Gebietes $\mathfrak{G}$ *eine stetige Kurve sei, ist notvendig und hinreichend, daß jeder seiner Punkte für* $\mathfrak{G}$ *allseitig erreichar sei.*

Die Bedingungen von Hahn ergeben:

Damit der Rand des Gebietes $\mathfrak{G}$ *eine stetige Kurve sei, ist notvendig und hinreichend, daß er zusammenhängend im kleinen sei.*

Durch (73) ist die Äquivalenz dieser beiden Bedingungen direkt nachgewiesen. Aus (71) oder (72) folgt, daß die Bedingung auch so ausgesprochen werden kann:

Damit der Rand des Gebietes $\mathfrak{G}$ *eine stetige Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß er nur aus Primenden erster Art bestehe.*

(Eingegangen am 23. Januar 1920.)

Über die stetigen Kurven der Ebene.

Von

Hans Hahn in Bonn.

Zum ersten Male wurden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine ebene Punktmenge Bogen einer stetigen Kurve sei, aufgestellt von A. Schoenflies[1]). Das Resultat, zu dem er gelangt, ist im folgenden Satze ausgesprochen[2]): „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein ebenes, geschränktes Kontinuum als stetiges und eindeutiges Bild der Strecke darstellbar ist, besteht darin, daß für jedes Gebiet, das der Komplementärmenge angehört, die allseitige Erreichbarkeit ihrer Grenze vorhanden ist, und daß Gebiete, deren Breite eine beliebig gegebene Größe übersteigt, nur in endlicher Anzahl auftreten." Später habe ich folgendes Resultat bewiesen, das das in Frage stehende Problem nicht nur in der Ebene, sondern auch in euklidischen Räumen beliebiger Dimensionszahl (ja darüber hinaus in metrischen Räumen großer Allgemeinheit) löst[3]): „Damit eine Punktmenge stetiges Bild einer (abgeschlossenen) Strecke sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein geschränktes, im kleinen zusammenhängendes Kontinuum ist." Aus der Tatsache, daß sowohl die von Schoenflies, als auch die von mir aufgestellten Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß eine ebene Punktmenge stetiges Bild einer Strecke sei, folgt, daß diese Bedingungen äquivalent sein müssen, und es entsteht daher die Aufgabe, diese Äquivalenz auch unmittelbar nachzuweisen.

In der vorstehenden Abhandlung von Frl. M. Torhorst wurde diese Aufgabe für den speziellen Fall gelöst, daß die betrachtete Punktmenge

[1]) Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil, Leipzig 1908, Kapitel VI.

[2]) A. a. O. S. 237.

[3]) Sitzungsber. d. Akad. Wien 123, Abt. IIa (1914), S. 2433ff. Zu demselben Resultate ist auch St. Mazurkiewicz gelangt; vgl. St. Mazurkiewicz, Sur les lignes de Jordan, Fundamenta mathematicae 1 (1910), S. 166–209.

and eines einfach zusammenhängenden, geschränkten Gebietes ist. Gestützt auf die Resultate dieser Arbeit will ich nun im folgenden die quivalenz der Schoenfliesschen Bedingungen und der meinen in voller llgemeinheit nachweisen. Die verwendete Terminologie ist dieselbe wie der Arbeit von Frl. Torhorst. Ein für allemal sei bemerkt, daß es ch nur um *ebene* Punktmengen handelt.

Sei $\mathfrak{A}$ eine geschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Punktenge, oder — wie wir kürzer sagen wollen — ein *geschränktes Kontinuum.* as Komplement von $\mathfrak{A}$ ist Vereinigung abzählbar vieler zu je zweien emder Gebiete, die alle bis auf eines geschränkt sind, wir nennen sie: *e zu* $\mathfrak{A}$ *komplementären Gebiete.* Nimmt man eine stereographische Abildung der Ebene auf die Kugeloberfläche vor, so verliert das nicht geschränkte unter diesen Gebieten seine Sonderstellung und verhält sich ganz ie alle anderen; es wird also genügen, die folgenden Erörterungen nur r die geschränkten Gebiete durchzuführen. Alle diese Gebiete sind einch zusammenhängend (Nr. 5)[4]). In der Tat, ist $\mathfrak{G}$ eines dieser Gebiete, ein ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufender einfacher Polygonzug, so kann, da $\mathfrak{A}$ zuammenhängend ist, im Innern von $\mathfrak{p}$ kein Punkt von $\mathfrak{A}$ liegen, das Innere on $\mathfrak{p}$ enthält also nur Punkte von $\mathfrak{G}$, wie behauptet.

Sei $\mathfrak{G}$ eines der zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebiete, P ein Primende von und ϱ ein Punkt des Primendes P. Ganz wie in Nr. 56 definieren wir: ibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ von ϱ eine aufsteigende (absteigende) egen P konvergierende Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von $\mathfrak{G}$, so daß jeder Punkt mit ϱ verbunden werden kann durch ein ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ liegendes Kontiuum aus $\mathfrak{A}$, so heiße die Menge $\mathfrak{A}$ im Punkt ϱ des Primendes *zusammenängend nach rechts* (links). Ganz wie in Nr. 63 beweisen wir sodann (es at nur überall an Stelle des Randes von $\mathfrak{G}$ die Menge $\mathfrak{A}$ zu treten):

Satz I. *In einem Primende von* $\mathfrak{G}$ *kann es nur einen Punkt geben, n dem* $\mathfrak{A}$ *nach rechts (links) zusammenhängend ist.*

Wie in Nr. 65 folgt daraus:

Satz II. *Es kann in einem Primende von* $\mathfrak{G}$ *höchstens zwei Punkte eben, in denen die Menge* $\mathfrak{A}$ *zusammenhängend im kleinen ist.*

Da es in jedem Primende, das nicht von erster Art ist, unendlich iele Punkte gibt, folgt aus Satz II:

Satz III. *Ist in jedem Punkte des Randes von* $\mathfrak{G}$ *die Menge* $\mathfrak{A}$ *zuammenhängend im kleinen, so hat* $\mathfrak{G}$ *nur Primenden erster Art.*

---

[4]) Dieser und ähnliche Hinweise beziehen sich auf die vorstehende Arbeit von rl. Torhorst.

Und daraus folgt weiter nach Nr. 71:

Satz IV. *Ist das geschränkte Kontinuum $\mathfrak{A}$ zusammenhängend im kleinen, so ist jeder Randpunkt eines zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebietes $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ aus allseitig erreichbar.*

Wir bezeichnen nun als *die Breite* eines Gebietes $\mathfrak{G}$ die obere Schranke der Abstände je zweier Punkte aus $\mathfrak{G}$. Dann gilt:

Satz V. *Ist das geschränkte Kontinuum $\mathfrak{A}$ zusammenhängend im kleinen, so gibt es — wenn ε irgendeine positive Zahl bedeutet — unter den zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten nur endlich viele, deren Breite $> \varepsilon$ ist.*

In der Tat, nehmen wir an, es gäbe unter diesen Gebieten *unendlich* viele, deren Breite $> \varepsilon$ wäre, etwa:

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n, \ldots .$$

Dann gibt es in $\mathfrak{G}_n$ zwei Punkte a_n und b_n, deren Abstand $> \varepsilon$ ist, und da $\mathfrak{G}_n$ ein Gebiet ist, so gibt es in $\mathfrak{G}_n$ einen a_n und b_n verbindenden Streckenzug $\mathfrak{w}_n$. Auf $\mathfrak{w}_n$ gibt es dann gewiß einen Punkt c_n, dessen Abstand sowohl von a_n als von b_n größer als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Indem wir nötigenfalls von der Folge der $\mathfrak{G}_n$ zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen, die Folge der Punkte c_n sei konvergent:

$$\lim_{n=\infty} c_n = c.$$

Fast alle Punkte a_n und b_n haben dann von c einen Abstand $> \frac{\varepsilon}{3}$.

Der Punkt c, in dem sich Punkte aus unendlich vielen verschiedenen zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten häufen, kann nicht selbst in einem der zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebiete liegen, gehört daher notwendig zu $\mathfrak{A}$. Weil $\mathfrak{A}$ zusammenhängend im kleinen, gibt es ein positives $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$, so daß jeder in der Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$[5]) von c liegende Punkt von $\mathfrak{A}$ mit c verbunden ist durch ein in der Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von c liegendes Kontinuum aus $\mathfrak{A}$. Für fast alle n liegt c_n in $\mathfrak{U}_\eta$ und somit auch in $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$, während a_n und b_n gewiß nicht in $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ liegen. Verfolgen wir dann den Streckenzug $\mathfrak{w}_n$ von c_n sowohl gegen a_n als gegen b_n, so müssen wir daher in beiden Richtungen auf einen ersten Schnittpunkt a_n' bzw. b_n' von $\mathfrak{w}_n$ mit dem Randkreise von $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ stoßen. Das Stück $a_n' b_n'$ des Streckenzuges $\mathfrak{w}_n$ heiße $\mathfrak{w}_n'$.

[5]) Das ist das Innere eines um c mit dem Radius η beschriebenen Kreises.

Sei n_0 so groß gewählt, daß c_{n_0} in $\mathfrak{U}_\eta$ liegt. Durch $\mathfrak{w}'_{n_0}$ wird $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ in zwei Teile zerlegt, und für fast alle n liegt c_n in jenem dieser Teile, der $\mathfrak{w}'_{n_0}$ enthält. Da je zwei $\mathfrak{w}_n$ zu verschiedenen Gebieten $\mathfrak{G}_n$ gehören, also gewiß keinen Punkt gemein haben, liegen auch fast alle $\mathfrak{w}'_n$ auf derjenigen Seite von $\mathfrak{w}'_{n_0}$, auf der c liegt. Seien $\mathfrak{w}'_{n_1}$ und $\mathfrak{w}'_{n_2}$ zwei dieser $\mathfrak{w}'_n$. Wenn eines von ihnen den Punkt c von $\mathfrak{w}'_{n_0}$ trennen sollte, so müssen sie notwendig so liegen, daß eines von ihnen, etwa $\mathfrak{w}'_{n_2}$, das andere $\mathfrak{w}'_{n_1}$ von c trennt (vgl. Figur 1). Jedenfalls können wir also sagen: Es gibt zwei Indizes n' und n'', so daß $c_{n'}$ und $c_{n''}$ in $\mathfrak{U}_\eta$ liegen und weiter so, daß durch den Streckenzug $\mathfrak{w}'_{n''}$ die Kreisfläche $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ so in zwei Teile zerlegt wird, daß $\mathfrak{w}'_{n'}$ und $\mathfrak{w}'_{n''}$ in verschiedenen dieser Teile liegen.

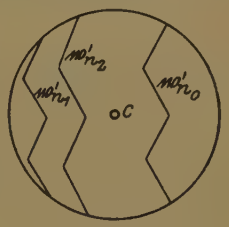

Fig. 1.

Ziehen wir nun vom Punkte $c_{n'}$ von $\mathfrak{w}'_{n'}$ die Verbindungsstrecke nach $c_{n''}$; sie muß, da $c_{n'}$ und $c_{n''}$ in verschiedenen zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten $\mathfrak{G}_n$ liegen, mindestens einen Punkt von $\mathfrak{A}$ enthalten. Sei d der zunächst an $c_{n'}$ gelegene dieser Punkte. Ebenso wie $c_{n'}$ und $c_{n''}$ gehört auch er zu $\mathfrak{U}_\eta$, und wie $c_{n'}$ ist auch er durch $\mathfrak{w}_{n''}$ von c getrennt. Nach Annahme aber ist jeder in $\mathfrak{U}_\eta$ liegende Punkt von $\mathfrak{A}$, und daher auch d, mit c verbunden durch ein in $\mathfrak{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ liegendes Kontinuum $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{A}$. Das aber ist nicht möglich; denn dann müßte $\mathfrak{T}$ notwendig mit $\mathfrak{w}_{n''}$ einen Punkt gemein haben, was nicht der Fall ist, da $\mathfrak{T}$ Teil von $\mathfrak{A}$ ist, $\mathfrak{w}_{n''}$ aber ganz dem zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebiete $\mathfrak{G}_{n''}$ verläuft. Damit ist Satz V bewiesen.

Wir beweisen nun die Umkehrung:

Satz VI. *Es erfülle das geschränkte Kontinuum $\mathfrak{A}$ die beiden folgenden Bedingungen:*

1. *Von jedem zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebiete $\mathfrak{G}$ aus ist jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbar.*

2. *Bedeutet ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es unter den zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten nur endlich viele, deren Breite $> \varepsilon$ ist.*

Dann ist das Kontinuum $\mathfrak{A}$ auch zusammenhängend im kleinen.

Sei, um dies nachzuweisen, a ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{A}$. Da in einem *inneren* Punkte die Menge $\mathfrak{A}$ gewiß zusammenhängend im kleinen ist, nehmen wir sogleich an, a sei ein *Randpunkt* von $\mathfrak{A}$. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem sich in a Punkte aus nur *endlich* vielen, oder aus *unendlich* vielen zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten häufen.

Erster Fall: Es gibt eine Umgebung von a, in der nur endlich viele zu $\mathfrak{A}$ komplementäre Gebiete Punkte besitzen. Seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ diese endlich vielen komplementären Gebiete, von denen a Häufungspunkt ist, und sei $\mathfrak{r}_i$ der Rand von $\mathfrak{G}_i$. Dann gehört a zu jeder der Mengen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n$. Da nach Annahme jeder Punkt von $\mathfrak{r}_i$ vom Gebiete $\mathfrak{G}_i$ aus allseitig erreichbar ist, so ist nach Nr. 73 jede der Mengen $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zusammenhängend im kleinen, und daher ist auch ihre Vereinigung:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$$

zusammenhängend im kleinen. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es daher ein $\eta > 0$ von folgender Eigenschaft: jeder zu $\mathfrak{B}$ gehörige Punkt der Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$ von a ist mit a verbunden durch ein ganz in der Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von a liegendes Kontinuum aus $\mathfrak{B}$. — Des weiteren kann η auch so klein gewählt werden, daß jeder nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörige Punkt von $\mathfrak{U}_\eta$ zu einem der n Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ gehört.

Um nun nachzuweisen, daß in a auch $\mathfrak{A}$ zusammenhängend im kleinen ist, sei b ein beliebiger zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Punkt von $\mathfrak{U}_\eta$. Wir verbinden b mit a durch die Strecke ba. Gehört sie ganz zu $\mathfrak{A}$, so ist sie ein in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, b mit a verbindendes Kontinuum aus $\mathfrak{A}$. Gehört sie nicht ganz zu $\mathfrak{A}$, so gibt es auf ihr, von b aus gerechnet, einen letzten Punkt c derart, daß die Strecke bc ganz zu $\mathfrak{A}$ gehört[6]). Dieser Punkt c ist dann Randpunkt mindestens eines der Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ und gehört daher zu unserer Menge $\mathfrak{B}$. Es gibt also, wie oben festgestellt, ein ganz in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, c mit a verbindendes Kontinuum $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{B}$. Dann aber ist die Vereinigung von $\mathfrak{T}$ und der Strecke bc ein ganz in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, b mit a verbindendes Kontinuum aus $\mathfrak{A}$. Es ist also jeder in $\mathfrak{U}_\eta$ liegende Punkt b von $\mathfrak{A}$ mit a verbunden durch ein in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes Kontinuum aus $\mathfrak{A}$, d. h. es ist $\mathfrak{A}$ in a zusammenhängend im kleinen, wie behauptet.

Zweiter Fall: In jeder Umgebung von a gibt es Punkte aus unendlich vielen zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten. Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Nach Annahme gibt es unter den zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebieten nur endlich viele, deren Breite $> \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ diese Gebiete. Wie im 1. Falle ist die Vereinigung $\mathfrak{B}$ der Ränder von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ zusammenhängend im kleinen.

Wir bestimmen nun zu dem gegebenen ε ein positives $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ durch folgende Vorschrift: *Gehört a zu $\mathfrak{B}$*, so sei η so gewählt, daß jeder in der Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$ von a liegende Punkt von $\mathfrak{B}$ mit a verbunden ist durch ein in der Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von a liegendes Kontinuum aus $\mathfrak{B}$[7]). *Gehört*

[6]) Natürlich kann c mit b zusammenfallen.

[7]) Da, wie eben bemerkt, $\mathfrak{B}$ zusammenhängend im kleinen ist, so ist dies möglich.

ngegen a nicht zu $\mathfrak{B}$, so wählen wir η so klein, daß in die Umgebung von a kein Punkt eines unsrer n Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ fällt.

Sei also η so bestimmt, und sei b ein beliebiger in $\mathfrak{U}_\eta$ liegender nkt von $\mathfrak{A}$. Wir ziehen wieder die Verbindungsstrecke ba. Gehört sie nz zu $\mathfrak{A}$, so ist sie wieder ein in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, b mit a verbindendes Kontiuum aus $\mathfrak{A}$. Gehört sie nicht ganz zu $\mathfrak{A}$, so unterscheiden wir zwei Fälle, nachdem sie einen von a verschiedenen Punkt aus $\mathfrak{B}$ enthält[8]) oder nicht.

Fall 2a: Die Strecke ba enthält keinen von a verschiedenen, zu $\mathfrak{B}$ hörigen Punkt. Der Durchschnitt der Strecke ba mit der Menge $\mathfrak{A}$ ldet eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{B}$ Die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkte n ba bilden abzählbar viele offene Intervalle (p_ν, q_ν), deren jedes in nem zu $\mathfrak{A}$ komplementären Gebiete $\mathfrak{G}_{n_\nu}$ liegt, wobei gewiß $n_\nu \geq n$ (da ndernfalls ein von a verschiedener Punkt der Strecke ba Randpunkt nes der Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ sein müßte und mithin Punkt von $\mathfrak{B}$ äre, entgegen der Voraussetzung).

Wir ersetzen nun jedes dieser Intervalle (p_ν, q_ν) durch den Rand $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ s (p_ν, q_ν) enthaltenden Gebietes $\mathfrak{G}_{n_\nu}$, bilden die Vereinigung der Menge $\mathfrak{B}$ nd aller dieser $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ und fügen zu dieser Vereinigung noch alle ihre Häufungsnkte hinzu Der so entstehende *abgeschlossene Teil* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *enthält e Punkte a und b.*

Wir behaupten weiter: $\mathfrak{C}$ *liegt ganz in der Umgebung* $\mathfrak{U}_\varepsilon$ *von a.* In r Tat, die Strecke ba liegt ganz in $\mathfrak{U}_\eta$. Wegen $n_\nu > n$ hat jedes unsrer ebiete $\mathfrak{G}_{n_\nu}$ eine Breite $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$, und da es die Teilstrecke $p_\nu q_\nu$ von ba nthält, steht sein Rand $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ von der Strecke ba um höchstens $\frac{\varepsilon}{2}$, von a so um höchstens $\frac{\varepsilon}{2} + \eta$ ab. Wegen $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ hat daher jeder Punkt der enge $\mathfrak{C}$ von a einen Abstand $< \varepsilon$, wie behauptet.

Wir behaupten endlich: *die Menge* $\mathfrak{C}$ *ist zusammenhängend.* In der at, andernfalls wäre sie Vereinigung zweier fremder, abgeschlossener engen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, deren keine leer ist. Da die bei Bildung von $\mathfrak{C}$ verendeten Mengen $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ zusammenhängend sind, muß jede von ihnen ganz $\mathfrak{C}_1$ oder ganz zu $\mathfrak{C}_2$ gehören; und da die beiden Endpunkte p_ν und der Strecke $p_\nu q_\nu$ zu $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ gehören, so gehören sie entweder beide zu $\mathfrak{C}_1$ der beide zu $\mathfrak{C}_2$. Daraus können wir weiter folgern, daß auch die Menge $\mathfrak{B}$ nz zu $\mathfrak{C}_1$ oder ganz zu $\mathfrak{C}_2$ gehört. Denn angenommen, dies wäre nicht r Fall, dann wären die beiden Durchschnitte

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1; \qquad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$$

[8]) Dies kann, zufolge unsrer Bestimmung von η, natürlich nur dann eintreten, nn auch a zu $\mathfrak{B}$ gehört.

zwei nicht leere, fremde, abgeschlossene Mengen. Da der Punkt b zu $\mathfrak{A}$ mithin auch zu $\mathfrak{B}$ gehört, so gehört er auch zu einer und nur einer der beiden Mengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$, etwa zu $\mathfrak{B}_1$. Bei Durchwanderung von ba in der Richtung von b gegen a müssen wir auf einen ersten zu $\mathfrak{B}_2$ gehörigen Punkt q stoßen, und ihm muß ein letzter zu $\mathfrak{B}_1$ gehöriger Punkt p vorausgehen. Die Strecke pq wäre dann eine unsrer Strecken $p_\nu q_\nu$, und es würde von ihren beiden Endpunkten der eine zu $\mathfrak{C}_1$, der andere zu $\mathfrak{C}_2$ gehören, entgegen dem vorhin gewonnenen Resultat, daß sie beide zu $\mathfrak{C}_1$ oder beide zu $\mathfrak{C}_2$ gehören. Es muß also tatsächlich $\mathfrak{B}$ ganz zu $\mathfrak{C}_1$ oder ganz zu $\mathfrak{C}_2$ gehören, wie behauptet. Sei etwa $\mathfrak{B}$ Teil von $\mathfrak{C}_1$.

Dann aber gehören auch alle unsre Punkte p_ν und q_ν zu $\mathfrak{C}_1$, mithin auch alle unsre Mengen $\mathfrak{r}_{n_\nu}$, und daher auch deren Vereinigung. Und da $\mathfrak{C}_1$ abgeschlossen ist, gehören dann auch alle Häufungspunkte dieser Vereinigung zu $\mathfrak{C}_1$, d. h. die ganze Menge $\mathfrak{C}$ gehört zu $\mathfrak{C}_1$. Mit anderen Worten: Es ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ ist leer, entgegen der Annahme, daß $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ nicht leer sind. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{C}$ zusammenhängend ist, wie behauptet.

Fassen wir zusammen, so sehen wir: $\mathfrak{C}$ *ist ein* b *und* a *verbindendes, ganz in* $\mathfrak{U}_\varepsilon$ *liegendes Kontinuum aus* $\mathfrak{A}$.

Fall 2b: Die Strecke ba enthält einen von a verschiedenen Punkt aus $\mathfrak{B}$. Wie schon in Fußnote*) bemerkt, gehört dann auch a zu $\mathfrak{B}$. Sei c der zunächst an b gelegene, zu $\mathfrak{B}$ gehörige Punkt der Strecke ba. Dann behandeln wir die Strecke bc ganz ebenso, wie wir im Falle 2a die Strecke ba behandelt haben, indem wir jedes ihrer zur Menge $\mathfrak{A}$ komplementären Intervalle (p_ν, q_ν) ersetzen durch den Rand $\mathfrak{r}_{n_\nu}$ desjenigen Gebietes $\mathfrak{G}_{n_\nu}$, in dem (p_ν, q_ν) liegt, und der so entstehenden Menge noch alle ihre Häufungspunkte hinzufügen. Wir gelangen so, wie im Falle 2a, zu einem b und c verbindenden, ganz in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegenden Kontinuum $\mathfrak{C}'$ aus $\mathfrak{A}$.

Da nun aber a zu $\mathfrak{B}$ gehört, und c in $\mathfrak{U}_\eta$ liegt, gibt es zufolge unserer Wahl von η ein in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, c mit a verbindendes Kontinuum $\mathfrak{C}''$ aus $\mathfrak{B}$. Und die Vereinigung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}''$ stellt *ein in* $\mathfrak{U}_\varepsilon$ *liegendes,* b *mit* a *verbindendes Kontinuum aus* $\mathfrak{A}$ *dar.*

Wir haben also in jedem Falle ein in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ liegendes, b mit a verbindendes Kontinuum aus $\mathfrak{A}$ gefunden. Das aber heißt: $\mathfrak{A}$ ist in a zusammenhängend im kleinen. Damit ist Satz VI bewiesen.

Indem wir die Sätze IV, V, VI zusammenfassen, erhalten wir das Schlußresultat:

Damit eine geschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Menge $\mathfrak{A}$ *auch im kleinen zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie folgende Eigenschaften habe:*

1. *Ist* $\mathfrak{G}$ *eines ihrer komplementären Gebiete, so ist jeder Randpunkt von* $\mathfrak{G}$ *allseitig erreichbar von* $\mathfrak{G}$ *aus.*

2. *Ist* ε *irgendeine positive Zahl, so gibt es unter den zu* $\mathfrak{A}$ *komplementären Gebieten nur endlich viele, deren Breite* $> \varepsilon$ *ist.*

Damit ist die Äquivalenz der Schoenfliesschen und meiner Bedingungen dafür, daß eine ebene Punktmenge stetiges Bild einer Strecke sei, nachgewiesen.

(Eingegangen am 23. Januar 1920.)

Summationsmethoden und Momentfolgen. I.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Die folgenden Betrachtungen knüpfen an die sehr einfache Bemerkung an, daß die Beziehung zwischen einer Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und ihren Cesàroschen Mitteln $A_0, A_1, A_2, \ldots$ irgendwelcher Ordnung sich in den *Differenzen*

$$b_n = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \ldots + (-1)^n a_n,$$

$$B_n = A_0 - \binom{n}{1} A_1 + \binom{n}{2} A_2 - \ldots + (-1)^n A_n$$

rein *multiplikativ* ausdrückt:

$$B_n = \mu_n b_n. \tag{0}$$

Die gleiche Bemerkung gilt von den Hölderschen Mitteln, die sich hierdurch auch für nicht ganzzahlige Ordnung definieren lassen. Allgemein sind die linearen Beziehungen zwischen den a_n, A_n, die die Form (0) haben, paarweise *vertauschbar* und bilden insofern ein natürliches System. Wenn hierbei jeder konvergenten Folge a_n eine konvergente Folge A_n entsprechen soll, so muß die Multiplikatorenfolge μ_n gewissen Bedingungen genügen; unser Hauptresultat ist, daß ihr dann eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Funktion $\chi(u)$ beschränkter Schwankung zugehört, deren Stieltjessche *Momentfolge* sie ist:

$$\mu_n = \mu(n), \qquad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u).$$

Durch passende Annahmen über die Funktion $\chi(u)$ oder die Momentfunktion $\mu(t)$ erhalten wir als Nebenergebnisse einen einfachen Beweis für die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte gleicher (beliebiger) Ordnung, ferner die Ausfüllung der Hölderschen Skala zu einer logarithmischen und ihre Ergänzung durch stärkere Skalen exponentialen Charakters. Überdies gelangen wir zu einer einfachen, den Umweg

ber Kettenbrüche vermeidenden Lösung des Momentproblems für ein end-
ches Intervall.

§ 1.

Die unendliche Matrix $\lambda = (\lambda_{p,m})$ $(p, m = 0, 1, 2, \ldots)$ sei „zeilen-
nit", d. h. für jedes p gebe es nur endlich viele $\lambda_{p,m} \neq 0$. Wenn das
Gleichungssystem

$$A_p = \sum_m \lambda_{p,m} a_m \tag{1}$$

in „Summationsverfahren"[1]) definieren, nämlich dazu dienen soll, einer
ivergenten Folge a_m den eventuell existierenden $\lim A_p$ als verall-
emeinerten Grenzwert zuzuordnen, so verlangt man naturgemäß, daß
ies Verfahren „konsistent" sei, d. h. bei einer konvergenten Folge a_m
en gewöhnlichen Grenzwert liefere: mit $a_m \to \alpha$ soll stets $A_p \to \alpha$ sein.
Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür hat Herr Toeplitz[2])
efunden. Es ist für unseren Zweck passender, die Forderung zu zerlegen,
nd wir nennen die Matrix λ eine *C-Matrix* (Konvergenz erhaltende Matrix),
enn aus der Konvergenz von a_m die von A_p folgt; speziell eine *reine*
-Matrix, wenn mit $a_m \to 0$ auch $A_p \to 0$, und noch spezieller eine
ormierte C-Matrix, wenn mit $a_m \to \alpha$ auch $A_p \to \alpha$. Die notwendigen
nd hinreichenden Bedingungen für eine C-Matrix sind:

(A) $\sum_m |\lambda_{p,m}|$ ist für $p = 0, 1, 2, \ldots$ beschränkt.

(B) $\lim_p \lambda_{p,m} = l_m$ existiert, für $m = 0, 1, 2, \ldots$

(C) $\lim_p \sum_m \lambda_{p,m} = l$ existiert.

Wir unterdrücken den Beweis, der dem Toeplitzschen Vorbild folgt.
ür $a_m \to \alpha$ hat man dann

$$A_p \to \left(l - \sum l_m\right)\alpha + \sum l_m a_m.$$

Für eine *reine* C-Matrix ist das Verschwinden sämtlicher l_m, für eine
ormierte überdies $l = 1$ notwendig und hinreichend. Eine reine C-Matrix
it $l \neq 0$ kann man „normieren", indem man sie mit $\frac{1}{l}$ multipliziert.
umme, Differenz und Produkt von zwei (reinen) C-Matrizen ist wieder
ine (reine) C-Matrix.

---

[1]) Für die *Reihe* $\sum (a_m - a_{m-1})$; es fehlt an einem entsprechenden Ausdruck
ir *Folgen*.

[2]) O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matematyczno-
izyczne. 22 (1911), S. 113–119.

Wir schreiben (1) in Matrizenform

$$A = \lambda a, \tag{2}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1 & 0 & 0 & \dots \\ A_2 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

und setzen fest, daß bei solchen „einspaltigen" Matrizen die Anhängung des Index p das Glied in der Zeile p, Spalte 0 bedeuten soll, also

$$A_p = (\lambda a)_p. \tag{3}$$

Nennen wir mit Herrn Toeplitz die Menge der Folgen a, für die $(\lambda a)_p$ konvergiert, das *Konvergenzfeld* $C(\lambda)$ der Matrix λ. Für zwei Matrizen λ, μ bestehen vier Möglichkeiten, die zur Aufstellung einer *Rangordnung* dienen können:

I. $C(\lambda) = C(\mu)$: λ mit μ *äquivalent.*
II. $C(\lambda)$ echte Teilmenge von $C(\mu)$: λ *schwächer* als μ.
III. $C(\mu)$ echte Teilmenge von $C(\lambda)$: λ *stärker* als μ.
IV. Keiner der Fälle I II III trifft zu : λ mit μ *unvergleichbar.*

In Zeichen etwa:

I: $\lambda \sim \mu$. II: $\lambda < \mu$. III: $\lambda > \mu$. IV: $\lambda \parallel \mu$.

Bezüglich des Rechnens mit Äquivalenzen sei nur bemerkt, daß aus $\lambda \sim \lambda'$ zwar $\lambda\mu \sim \lambda'\mu$, aber nicht $\mu\lambda \sim \mu\lambda'$ folgt. Aus $\lambda \sim \lambda'$, $\mu \sim \mu'$ folgt, wenn λ' mit μ vertauschbar ist: $\lambda\mu \sim \lambda'\mu = \mu\lambda' \sim \mu'\lambda'$. In einem System paarweise vertauschbarer Matrizen dürfen also Äquivalenzen multipliziert werden.

Wenn die Matrizen λ, μ Reziproke haben, so verteilen sich die obigen vier Fälle folgendermaßen:

I. $\mu\lambda^{-1}$ und $\lambda\mu^{-1}$ sind C-Matrizen.
II. $\mu\lambda^{-1}$ ist C-Matrix, $\lambda\mu^{-1}$ nicht.
III. $\lambda\mu^{-1}$ ist C-Matrix, $\mu\lambda^{-1}$ nicht.
IV. Weder $\mu\lambda^{-1}$ noch $\lambda\mu^{-1}$ ist C-Matrix.

Sind $\mu\lambda^{-1}$ und $\lambda\mu^{-1}$ reine (normierte) C-Matrizen, so wollen wir λ und μ rein (normiert) äquivalent nennen und die normierte Äquivalenz mit

$$\lambda \approx \mu$$

bezeichnen.

Sind λ und λ^{-1} reine C-Matrizen, so ist λ im vorhin erwähnten Sinne er Normierung fähig. Sind λ, μ rein äquivalent, so kann man durch Anringung eines nichtverschwindenden Zahlfaktors (Normierung von $\mu\lambda^{-1}$) ormierte Äquivalenz herstellen.

Sei nun ϱ eine *feste* Matrix, die eine Reziproke hat, und

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

ine *willkürliche Diagonalmatrix.* Wir beschränken uns nunmehr auf latrizen der Gestalt

4) $$\lambda = \varrho^{-1}\mu\varrho,$$

ie vermöge des festen ϱ in eine Diagonalmatrix überführbar sind; *diese Matrizen sind paarweise vertauschbar.* Ist umgekehrt $\lambda^* = \varrho^{-1}\mu^*\varrho$ eine er Matrizen (4), worin die Elemente μ_n^* der Diagonalmatrix μ^* paarweise erschieden sind, so sind *alle* mit λ^* vertauschbaren Matrizen λ durch (4) egeben; denn setzt man $\mu = \varrho\lambda\varrho^{-1}$, also $\lambda = \varrho^{-1}\mu\varrho$, so ist μ mit μ^* verauschbar und daher, wie unmittelbar folgt, ebenfalls eine Diagonalmatrix.

Die Beziehung $A = \lambda a$ nimmt nach (4) vermöge der einspaltigen ilfsmatrizen

5) $$b = \varrho a, \quad B = \varrho A$$

ie einfache Form

6) $$B = \mu b,$$

lso die multiplikative Gestalt

7) $$B_n = \mu_n b_n$$

n; der Matrix λ entspricht die Diagonalmatrix μ oder die *Multiplikatorenolge* μ_n umkehrbar eindeutig. Wir nennen diese eine (reine, normierte) *-Folge*, wenn λ eine (reine, normierte) C-Matrix ist, und übertragen uch die Graduierung (äquivalent, schwächer, stärker, unvergleichbar) auf ie Multiplikatorenfolgen. Dieses einfache Prinzip wollen wir für eine ganz pezielle, numerisch bestimmte Wahl der transformierenden Matrix ϱ genauer verfolgen.

§ 2.

Aus einer Zahlenfolge a_m bilden wir die Doppelfolge der Differenzen erschiedener Ordnung

8) $$a_{m,n} = a_m - \binom{n}{1} a_{m+1} + \binom{n}{2} a_{m+2} - \dots + (-1)^n a_{m+n}$$

mit der *Rekursionsformel*

$$a_{m,n} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1}.$$

Insbesondere nennen wir die einfache Folge der Zahlen

$$b_n = a_{0,n} = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \tag{9}$$

kurz die *Differenzenfolge* der a_m. Die Differenzen der b_n sind dann

$$b_{n,m} = a_{m,n},$$

denn dies gilt für $m = 0$ und wird vermöge der Rekursionsformel von m auf $m+1$ übertragen; insbesondere ist

$$a_m = a_{m,0} = b_{0,m}, \cdot$$

die a_m bilden also auch die Differenzenfolge der b_n, so daß die zu (9) gehörige Matrix

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 1 & -1 & 0 & 0 \ldots \\ 1 & -2 & 1 & 0 \ldots \\ 1 & -3 & 3 & -1 \ldots \\ . & . & . & . \ldots \\ . & . & . & . \ldots \\ . & . & . & . \ldots \end{pmatrix}$$

($b = \varrho a$) ihre eigene Reziproke ist. Auf diese festgewählte Matrix ϱ gründen wir die Zuordnung (4) zwischen Matrizen λ und Diagonalmatrizen μ, betrachten jetzt also *nur solche Gleichungssysteme* (1), *die in den Differenzenfolgen* b_n, B_n *die multiplikative Gestalt* (7) *haben*.

Der Zusammenhang zwischen den a_m, b_n kann auf bekannte Arten mittels erzeugender Funktionen einfach ausgedrückt werden (man braucht die auftretenden Potenzreihen nicht einmal konvergent vorauszusetzen, sondern kann sie als komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten auffassen). Einerseits ist

$$\sum_n b_n \frac{z^n}{n!} = e^z \sum_m (-1)^m a_m \frac{z^m}{m!}, \tag{10}$$

andererseits

$$\sum_n b_n y^n = \sum_m (-1)^m a_m \frac{y^m}{(1-y)^{m+1}}; \tag{11}$$

dies letzte können wir so ausdrücken, daß vermöge der Eulerschen Transformation

$$(1-x)(1-y) = 1$$

zwischen

$$f(x) = \sum_m a_m x^m, \qquad g(y) = \sum_n b_n y^n \tag{12}$$

er Zusammenhang

$$f(x) = (1-y)g(y), \qquad g(y) = (1-x)f(x)$$

esteht.

Drücken wir nun die Beziehungen $B_n = \mu_n b_n$ in den a_m, A_p aus, o kommt

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} \mu_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{n} (-1)^n \binom{p}{n} \mu_n (-1)^m \binom{n}{m} a_m \\ &= \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=m}^{p} (-1)^{n-m} \binom{p}{m} \binom{p-m}{n-m} \mu_n a_m \\ &= \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} a_m \sum_{n=0}^{p-m} (-1)^n \binom{p-m}{n} \mu_{m+n}, \end{aligned}$$

der

13) $$A_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} a_m$$

ach der Bezeichnungsweise (8), d. h. die $\mu_{m,n}$ sind die Differenzen der μ_n.

Setzt man alle $a_m = 1$, so kommt

14) $$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = \mu_0.$$

Die Bedingungen § 1, (A) (B) dafür, daß die Gleichungen (13) einer -Matrix $\lambda = \varrho\,\mu\,\varrho$ entsprechen, lauten nun:

α) $M_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} |\mu_{m,p-m}|$ ist für $p = 0, 1, 2, \ldots$ beschränkt:

$$M_p \leqq M$$

β) $\lim_p \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = l_m$ existiert, für $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Die Bedingung (C) ist wegen (14) von selbst erfüllt. Das sind also die otwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine C-Folge μ_n; für $_n \to \alpha$ ist dann

$$A_p \to \left(\mu_0 - \sum l_m\right)\alpha + \sum l_m a_m.$$

Für eine reine C-Folge ist das Verschwinden aller l_m, für eine normierte berdies $\mu_0 = 1$ notwendig und hinreichend.

In Wahrheit steht aber, wie wir nun zeigen wollen, die Sache noch einfacher: *die Bedingung* (α) *allein genügt*, und aus ihr folgen sämtliche Bedingungen (β) und zwar mit

$$l_1 = l_2 = \ldots = 0.$$

Es wird also (α) die notwendige und hinreichende Bedingung für eine C-Folge, und aus $a_m \to \alpha$ folgt dann

$$A_p \to \mu_0 \alpha + l_0 (a_0 - \alpha), \qquad l_0 = \lim \mu_{0,p}.$$

Für eine reine C-Folge tritt die Bedingung $l_0 = 0$, für eine normierte $\mu_0 = 1$ hinzu.

§ 3.

Eine (reelle) Folge μ_m heiße *total monoton* (I. Schur), *wenn alle Differenzen* $\mu_{m,n} \geqq 0$ *sind*[3]). Wir zeigen, daß für eine total monotone Folge die Grenzwerte l_m existieren und, bis auf $l_0 \geqq 0$, verschwinden.

Setzen wir

$$\lambda_{m,m} = \binom{p}{m} \mu_{m,p-m}, \qquad \Lambda_{p,m} = \lambda_{p,0} + \lambda_{p,1} + \ldots + \lambda_{p,m},$$

so erhält man aus der Rekursionsformel

$$\mu_{m,p-m} = \mu_{m,p-m+1} + \mu_{m+1,p-m}$$

durch Multiplikation mit $\frac{(p+1)!}{m!\,(p-m)!}$

$$(p+1)\,\lambda_{p,m} = (p-m+1)\,\lambda_{p+1,m} + (m+1)\,\lambda_{p+1,m+1}$$

oder

$$(p+1)\,(\lambda_{p,m} - \lambda_{p+1,m}) = (m+1)\,\lambda_{p+1,m+1} - m\,\lambda_{p+1,m},$$

also

$$(p+1)\,(\Lambda_{p,m} - \Lambda_{p+1,m}) = (m+1)\,\lambda_{p+1,m+1}.$$

Hiernach ist $\Lambda_{p,m} \geqq \Lambda_{p+1,m} \geqq 0$ und es existiert $L_m = \lim_p \Lambda_{p,m}$, also auch $l_m = L_m - L_{m-1}$ $(l_0 = L_0)$; ferner ist nach der letzten Formel $\sum_p \frac{1}{p+1} \lambda_{p+1,m+1}$ konvergent, und wegen der Divergenz von $\sum_p \frac{1}{p+1}$ kann demnach $\lim_p \lambda_{p+1,m+1} = l_{m+1}$ nicht $\neq 0$ sein.

Sodann zeigen wir, *daß eine reelle Folge* μ_n, *die der Bedingung* (α) *genügt, Differenz zweier total monotoner Folgen ist.* Vermöge der Rekursionsformel der Differenzen hat man

$$\mu_{m,n} | \leqq | \mu_{m,n+1} | + | \mu_{m+1,n} | \leqq | \mu_{m,n+2} | + 2 | \mu_{m+1,n+1} | + | \mu_{m+2,n} | \leqq \cdots$$

[3]) Nur für eine total monotone Folge mit $\mu_0 = 1$ stellen die Gleichungen (13) eine lineare *Mittel*bildung im eigentlichen Sinne dar.

peziell für $m = n = 0$: $M_0 \leqq M_1 \leqq M_2 \leqq \ldots$, so daß die Forderung (α) rch die der Konvergenz $M_p \to M$ ersetzt werden kann). Die Folge eser Größen ist beschränkt, da

$$\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} \mu_{m+h,\,n+p-h} \Big| \leqq \sum_{h=0}^{p} \binom{m+n+p}{m+h} \Big| \mu_{m+h,\,n+p-h} \Big| \leqq M_{m+n+p} \leqq M,$$

t also einen Grenzwert $\pi_{m,n}$; ersichtlich ist

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n+1} + \pi_{m+1,n}$$

d daher sind die $\pi_{m,n}$ die Differenzen der Größen $\pi_{m,0} = \pi_m$:

$$\pi_{m,n} = \pi_m - \binom{n}{1} \pi_{m+1} + \ldots + (-1)^n \pi_{m+n}.$$

Wegen $\pi_{m,n} \geqq |\mu_{m,n}| \geqq \pm \mu_{m,n}$ sind die Folgen

$$\alpha_m = \tfrac{1}{2}(\pi_m + \mu_m), \qquad \beta_m = \tfrac{1}{2}(\pi_m - \mu_m)$$

tal monoton und $\mu_m = \alpha_m - \beta_m$ Differenz total monotoner Folgen. Beiufig sind dies die „kleinsten" total monotonen Folgen, als deren Differenz darstellbar ist, d. h. man erhält jede andere Darstellung, indem man β_m um eine und dieselbe, willkürliche, total monotone Folge vermehrt.

Endlich ist bei jeder komplexen Folge μ_n, die der Bedingung (α) nügt, sowohl Realteil als Imaginärteil Differenz total monotoner Folgen, d demnach existieren die Grenzwerte l_m mit $l_{m+1} = 0$.

Damit sind die Behauptungen am Schlusse von § 2 bewiesen; man ht übrigens unmittelbar, daß die bloße Verwandlung des Anfangsgliedes in $\mu_0 - l_0$ aus der C-Folge eine reine C-Folge macht. Und wir nnen als Ergebnis der bisherigen Untersuchungen aussprechen:

Satz I. *Damit μ_n eine C-Folge sei, ist notwendig und hinreichend,*

$$M_p = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} |\mu_{m,\,p-m}| \quad \textit{beschränkt } (M_p \to M)$$

; mit $l_0 = \lim \mu_{0,n}$ ist dann $\mu_0 - l_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ eine reine C-Folge.

§ 4.

Wir zeigen zunächst, daß zu den hier betrachteten Beziehungen $= \lambda a$ oder $B = \mu b$ die Cesàrosche und Höldersche Mittelbildung hört[4]).

[4]) Dies ist, soviel ich weiß, nur in der (nach Abfassung der vorliegenden Arbeit rch freundliche Mitteilung des Herrn I. Schur zu meiner Kenntnis gelangten) handlung bemerkt worden: W. A. Hurwitz and L. L. Silverman, On the consency and equivalence of certain definitions of summability, Transact. Amer. Math.

Wir definieren die Matrix S^α (Summenmatrix der Ordnung α) in der Schreibweise (3) durch

$$(S^\alpha a)_n = a_n + \binom{\alpha}{1} a_{n-1} + \binom{\alpha+1}{2} a_{n-2} + \ldots + \binom{\alpha+n-1}{n} a_0$$

$$= a_n + \frac{\alpha}{1} a_{n-1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2} a_{n-2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} a_0,$$

so daß formal

$$\sum_n (S^\alpha a)_n x^n = (1-x)^{-\alpha} \sum_n a_n x^n,$$

wo $(1-x)^{-\alpha}$ die Binomialreihe bedeutet; daraus folgt

$$S^\alpha S^\beta = S^{\alpha+\beta}.$$

Hierin kann α beliebig (auch komplex) sein. Nehmen wir aber α von $-1, -2, -3, \ldots$ verschieden an, so daß $\left[\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ zu setzen}\right]$

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ von Null verschieden ist, so können wir eine Matrix C_α, die *Cesàrosche Matrix* der Ordnung α, durch

$$A = C_\alpha a,$$

$$A_n = (C_\alpha a)_n = (S^\alpha a)_n : \binom{n+\alpha}{n} \tag{15}$$

erklären. Wir behaupten, daß dies mit

$$B_n = b_n : \binom{n+\alpha}{n} \tag{16}$$

identisch ist; d. h. also: bedeutet c_α die Diagonalmatrix mit dem allgemeinen Gliede $1 : \binom{n+\alpha}{n}$, so ist $C_\alpha = c_\alpha S^\alpha = \varrho\, c_\alpha \varrho$.

Nehmen wir zum Beweise α positiv an und benutzen die erzeugenden Funktionen (12). Es ist

$$1 : \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \alpha \int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1}\, du,$$

Soc., **18** (1917), S. 1–20. Daß es nicht häufiger geschehen ist, dürfte an der verbreiteten Gewohnheit liegen, in der Definition (15) der Cesàroschen Mittel den Divisor $\binom{n+\alpha}{n}$ durch den (für $n \to \infty$) äquivalenten $(n+1)^\alpha : \Gamma(\alpha+1)$ zu ersetzen, also an Stelle der „natürlichen" Cesàroschen Matrix C_α die „modifizierte"

$$C_\alpha^* = E_\alpha C_\alpha \approx C_\alpha$$

zu betrachten, wo E_α die Diagonalmatrix mit dem allgemeinen Gliede $\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} : (n+1)^\alpha$ ist. Vgl. dazu Fußnote [8]).

so

$$F(x) = \sum A_n x^n = \alpha \int_0^1 \sum (S^\alpha a)_n x^n u^n (1-u)^{\alpha-1} du$$

$$= \alpha \int_0^1 f(ux)(1-ux)^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du$$

$$= \frac{\alpha}{x} \int_0^x f(\xi)(1-\xi)^{-\alpha}\left(1-\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha-1} d\xi,$$

so mittels der Eulerschen Transformation

$$(1-x)(1-y) = (1-\xi)(1-\eta) = 1:$$

$$G(y) = (1-x)F(x) = \frac{\alpha}{y} \int_0^y g(\eta)(1-\eta)^{\alpha+1}\left(\frac{1-\frac{\eta}{y}}{1-\eta}\right)^{\alpha-1} \frac{d\eta}{(1-\eta)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{y} \int_0^y g(\eta)\left(1-\frac{\eta}{y}\right)^{\alpha-1} d\eta = \alpha \int_0^1 g(uy)(1-u)^{\alpha-1} du,$$

so

7) $$B_n = b_n \cdot \alpha \int_0^1 u^n (1-u)^{\alpha-1} du = b_n : \binom{n+\alpha}{n} \qquad (\alpha > 0).$$

amit ist (16) für $\alpha > 0$ bewiesen, gilt aber allgemein für $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, a beide Seiten rationale Funktionen von α und in dem angegebenen Ge- iet regulär sind. Wir wollen uns übrigens, wie üblich, auf Cesàrosche ittelbildung von reeller Ordnung $\alpha > -1$ beschränken.

Die Bildung des arithmetischen Mittels entspricht der Matrix $C_1 = C$, ie wir auch mit H bezeichnen wollen, und liefert für die Differenzenfolgen

$$B_n = b_n : (n+1).$$

ie wiederholte, *Höldersche Mittelbildung* gibt für die Matrix H^k $= 1, 2, \ldots$) die Beziehung

$$B_n = b_n : (n+1)^k,$$

onach es sich von selbst gebietet, sie für jede beliebige (auch komplexe) rdnung α durch

8) $$B_n = b_n : (n+1)^\alpha$$

definieren. Die zugehörige Matrix H^α hat, wie S^α (aber nicht C_α), e Eigenschaft

$$H^\alpha H^\beta = H^{\alpha+\beta}.$$

peziell für $\alpha > 0$ können wir analog zu (17) den Multiplikator durch n Integral ausdrücken und schreiben

$$(19) \qquad B_n = b_n \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(n+1)x} x^{\alpha-1} dx$$

$$= b_n \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^n \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} du \qquad (\alpha > 0).$$

Wir beschränken uns auf Höldersche Mittelbildung reeller Ordnung.

Da H der Multiplikatorenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ mit paarweise verschiedenen Gliedern entspricht, so können wir, nach der Bemerkung am Ende von § 1, unsere Matrizen $\lambda = \varrho\mu\varrho$ als *die mit H vertauschbaren Matrizen* definieren[5]). Bemerken wir noch mit Herrn I. Schur, daß die Funktionalgleichung $H(\alpha)H(\beta) = H(\alpha+\beta)$ mit der Anfangsbedingung $H(1) = H$ die Matrix $H(\alpha)$ eindeutig bestimmt, wenn man sie (nämlich jedes ihrer Elemente) als reelle stetige Funktion der reellen Variablen α voraussetzt. Denn $H(\alpha)$ ist mit H vertauschbar, also $H(\alpha) = \varrho\mu(\alpha)\varrho$, gebildet mit einer Diagonalmatrix $\mu(\alpha)$, für deren Elemente sich $\mu_n(\alpha)\mu_n(\beta) = \mu_n(\alpha+\beta)$ mit $\mu_n(1) = 1:(n+1)$, also bekanntlich $\mu_n(\alpha) = 1:(n+1)^\alpha$ ergibt, d. h. $H(\alpha)$ ist unser H^α. Entsprechendes gilt beiläufig auch von S^α.

§ 5.

Dem Fingerzeige folgend, den die Integraldarstellungen (17), (19) geben, bilden wir mit einer Funktion $\chi(u)$, die im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ von beschränkter Schwankung ist, die Stieltjesschen Integrale

$$(20) \qquad \mu_n = \int_0^1 u^n d\chi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und nennen dies eine *Momentfolge*. Wir werden erkennen, daß *C-Folgen und Momentfolgen identisch* sind. Einstweilen genügt uns die eine Hälfte dieser Behauptung:

Satz II. *Jede Momentfolge ist eine C-Folge; dann und nur dann, wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist, ist sie eine reine C-Folge.*

---

[5]) Als solche werden sie von Hurwitz und Silverman (loc. cit. [4])) behandelt und in der Form $\lambda = \varphi(H)$ dargestellt, die definitionsgemäß (im Einklang mit dem Spezialfall eines Polynoms $\varphi(x)$) der Multiplikatorenfolge $\mu_n = \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$ entspricht; $\varphi(x)$ wird dabei für $x = 0$ als regulär angenommen. Aber gerade diese Annahme ist zu eng (sie läßt z. B. Cesàrosche und Höldersche Matrizen nur von ganzzahliger Ordnung zu) und das Hauptergebnis der Verf., daß eine für $|x - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ reguläre Funktion $\varphi(x)$ eine reine C-Matrix $\varphi(H)$ liefert, hat nur hinreichenden, nicht notwendigen Charakter.

Da die Differenz von zwei (reinen) C-Folgen eine (reine) C-Folge t, so genügt es, $\chi(u)$ als monoton zunehmend vorauszusetzen. Dann t aber

$$\mu_{m,n} = \int_0^1 u^m (1-u)^n d\chi(u) \geqq 0,$$

ie Folge μ_m ist total monoton und (α) ist wegen (14) von selbst erfüllt. tatt der Zusatzbehauptung können wir ohne mehr Mühe gleich die Erüllung sämtlicher Bedingungen (β) beweisen. Es ist im ganzen Intervall

$$\binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq [u+(1-u)]^p = 1,$$

aher bei Zerlegung $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1 \quad (0<\delta<1)$

$$\binom{p}{m} \mu_{m,p-m} \leqq \int_0^\delta d\chi(u) + \binom{p}{m} (1-\delta)^{p-m} \int_\delta^1 d\chi(u),$$

lso für $p \to \infty$

$$\overline{\lim_p} \binom{p}{m} \mu_{m\ p-m} \leqq \chi(\delta) - \chi(0)$$

nd für $\delta \to 0$, falls $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$ stetig ist: $\lim_p \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = 0$;

ie Bedingungen (β) sind mit $l_0 = l_1 = \ldots = 0$ erfüllt, μ_n bildet eine eine C-Folge.

Für eine Unstetigkeit an der Stelle $u=0$ ist der einfachste Fall, aß $\chi(u)$ dort den Sprung 1 macht und sonst konstant ist; dem entpricht die Momentfolge

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = 0,$$

ir die sich $A_\mu = a_0$ ergibt, also eine C-Folge, aber keine reine. Im allemeinen Fall, wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$ den Sprung $\chi(+0) - \chi(0) = \chi_0$ macht, können wir $\chi(u)$ auffassen als Summe einer bei $u=0$ stetigen unktion und einer solchen, die bei $u=0$ den Sprung χ_0 macht und onst konstant ist, also ist μ_n eine C-Folge und

$$\mu_0 - \chi_0,\ \mu_1,\ \mu_2, \ldots$$

ne reine C-Folge. Beiläufig folgt daraus $\chi_0 = \lim \mu_{0,n}$.

Aus Satz I folgt unmittelbar, daß auch die Differenzen $\lambda_n = \mu_{0,n}$ ner C-Folge eine C-Folge bilden; die Bedingung einer reinen C-Folge ist hier $\lim \lambda_{0,n} = \lim \mu_n = 0$, bei Momentfolgen also die Stetigkeit von (u) an der Stelle $u=1$. Im allgemeinen Fall ist $\chi(1) - \chi(1-0) = \lim \mu_n$ er Sprung an der Stelle $u=1$.

Läßt man $\chi(u)$ an der Stelle $\vartheta\,(0<\vartheta<1)$ einen Sprung machen und sonst konstant sein, so erhält man die reine C-Folge

$$\mu_n=\vartheta^n. \tag{21}$$

Prüfen wir ihre Stärke, auf die wir noch zurückkommen (§ 7), an der Folge $a_m=z^m$, die für $|z|<1$ nach 0 konvergiert. Es wird hier

$$A_p=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}z^m\vartheta^m(1-\vartheta)^{p-m}=(1-\vartheta+\vartheta z)^p$$

und dies konvergiert nach 0, falls $(z=x+iy)$

$$|1-\vartheta+\vartheta z|^2=1-2\vartheta(1-x)+\vartheta^2[(1-x)^2+y^2]<1,$$

eine Bedingung, die man dann und nur dann durch geeignetes $0<\vartheta<1$ erfüllen kann, falls $1-x>0$. Für jeden Wert z in der Halbebene $\Re z<1$ kann also die Folge z^m durch eine Multiplikatorenfolge (21) mit hinreichend kleinem ϑ zur Konvergenz nach 0 gebracht werden. Man bemerke, daß der Borelsche Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}e^{-t}\sum z^n\frac{t^n}{n!}$$

ebenfalls für $\Re z<1$, der Abelsche

$$\lim_{t\to 1}(1-t)\sum z^n t^n$$

nur für $|z|\leqq 1$ existiert.

Für $|z|\leqq 1$, $z\neq 1$ wird übrigens die Folge z^m durch jede noch so schwache Momentfolge, die einer bei $u=0$ und $u=1$ stetigen Funktion $\chi(u)$ entspricht, zur Konvergenz nach 0 gebracht. Es genügt, $|z|=1$, $z=e^{i\varphi}$ (φ kein Vielfaches von 2π) anzunehmen; dann wird

$$A_p=\int_0^1(1-u+ue^{i\varphi})^p\,d\chi(u),$$

$$|1-u+ue^{i\varphi}|^2=1-4u(1-u)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

und bei Zerlegung des Integrals ($0<\delta<\frac{1}{2}$ und $\chi(u)$ monoton zunehmend gedacht)

$$|A_p|\leqq\int_0^{\delta}d\chi(u)+\left[1-4\delta(1-\delta)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{p}{2}}\int_{\delta}^{1-\delta}d\chi(u)+\int_{1-\delta}^{1}d\chi(u),$$

woraus wie oben

$$\overline{\lim}\,|A_p|\leqq\chi(\delta)-\chi(0)+\chi(1)-\chi(1-\delta)$$

und auf Grund der Stetigkeitsannahme $A_p\to 0$ folgt.

Beschränken wir uns des weiteren auf den Fall, daß $\chi(u)$ für $\leqq u \leqq 1$ stetig ist und für $0 < u < 1$ eine stetige Ableitung $\varphi(u)$ hat, also auf reine C-Folgen der Gestalt

22) $$\mu_n = \int_0^1 \varphi(u)\, u^n\, du$$

mit Existenz des eventuell uneigentlichen Integrals $\int_0^1 |\varphi(u)|\, du$, oder ($u = e^{-x}$, $\Phi(x) = u\varphi(u)$)

23) $$\mu_n = \int_0^\infty \Phi(x)\, e^{-xn}\, dx$$

mit stetigem $\Phi(x)$ für $x > 0$ und Existenz von $\int_0^\infty |\Phi(x)|\, dx$. Man sieht unmittelbar, daß auch mehrfache Integrale wie

24) $$\begin{cases} \mu_n = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(u, v)\, u^n\, du\, dv = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y)\, e^{-xn}\, dx\, dy, \\ \mu_n = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(u, v)\, (uv)^n\, du\, dv = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y)\, e^{-(x+y)n}\, dx\, dy, \end{cases}$$

worin $\Phi(x, y)$ für $x, y > 0$ stetig und $\int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(x, y)|\, dx\, dy$ existierend angenommen ist, reine C-Folgen liefern (auch ohne Zurückführung auf einfache Integrale).

Beispiele. Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

gibt nach (22) die normierte C-Folge

$$\mu_n = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)} = \binom{n+\beta-1}{n} : \binom{n+\alpha+\beta-1}{n}.$$

Diese Multiplikatorenfolge entspricht nach (16) der Matrix[6])

$$\lambda = C_{\alpha+\beta-1} : C_{\beta-1},$$

die also eine normierte C-Matrix ist; d. h. mit einem Cesàroschen Mittel der Ordnung > -1 konvergiert jedes Mittel höherer Ordnung und zwar nach demselben Grenzwert. Übrigens ist λ^{-1} keine C-Matrix $\left(\frac{1}{\mu_n}\right.$ divergiert mit n nach ∞ und ist also keine C-Folge, da eine solche wegen (α) jedenfalls beschränkt sein muß$\left.\right)$ und daher $C_{\alpha+\beta-1}$ *stärker* als $C_{\beta-1}$.

---

[6]) Wegen der Vertauschbarkeit aller unserer Matrizen können wir Matrizenquotienten mit Doppelpunkt oder Bruchstrich schreiben. Aus demselben Grunde dürfen hier Äquivalenzen multipliziert werden (§ 1), wobei aus reinen (normierten) Äquivalenzen wieder solche entstehen.

Für $\alpha = 1$ erhält man speziell die C-Folge

$$\mu_n = \frac{\beta}{n+\beta}$$

und die normierte C-Matrix

$$\Gamma_\beta = C_\beta : C_{\beta-1}$$

deren zugehörige lineare Substitution $A = \Gamma_\beta a$ übrigens

$$A_p = \left[a_0 + \binom{\beta}{1} a_1 + \binom{\beta+1}{2} a_2 + \ldots + \binom{\beta+p-1}{p} a_p\right] : \binom{\beta+p}{p}$$

lautet, mit den in umgekehrter Reihenfolge angeordneten Koeffizienten von C_β. Kombiniert man linear dies μ_n mit der Folge $\mu_n = 1$, die der Einheitsmatrix E entspricht, so erhält man

$$\mu_n = \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) : \left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

als normierte C-Folge, zugleich aber auch $\frac{1}{\mu_n}$, und das besagt $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_\beta$; die Matrizen Γ_β $(\beta > 0)$ sind allesamt normiert äquivalent; insbesondere $\Gamma_\beta \approx \Gamma_1 = C$

Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

oder

$$\Phi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}$$

gibt

$$\mu_n = \left(\frac{\beta}{n+\beta}\right)^\alpha$$

als normierte C-Folge; ihr entspricht für $\beta = 1$ die Hölder sche Matrix H^α, für beliebiges β die als α-te Potenz von Γ_β aufzufassende Matrix Γ_β^α. H^α ist also stärker als die Einheitsmatrix und $H^{\alpha+\gamma}$ stärker als H^γ bei beliebigem γ: mit einem Hölderschen Mittel konvergiert jedes Mittel höherer Ordnung nach demselben Grenzwert. Das gleiche gilt von Γ_β^α.

Die Relation $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_1$ oder $C_\alpha : C_{\alpha-1} \approx H$ läßt sich nun schreiben $C_{\alpha-1} : H^{\alpha-1} \approx C_\alpha : H^\alpha$ oder $(\alpha > 0)$

$$(25) \qquad \frac{C_{\alpha-1}}{H^{\alpha-1}} \approx \frac{C_\alpha}{H^\alpha} \approx \frac{C_{\alpha+1}}{H^{\alpha+1}} \approx \ldots,$$

insbesondere $(\alpha = 1)$

$$E = \frac{C}{H} \approx \frac{C_2}{H^2} \approx \frac{C_3}{H^3} \approx \ldots.$$

d. h.

$$C_k \approx H^k$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ Das ist der Äquivalenzsatz der Herren Knopp und

Schnee[7]); die Einschränkung auf ganzes k werden wir sogleich beseitigen. Unserem Beweis liegt die Äquivalenz

$$T_\alpha = \Gamma_1 : \Gamma_\alpha \approx E$$

zugrunde; dieser Matrix T_α entspricht die C-Folge

$$\mu_n = \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) : (1+n) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{n+1},$$

und daher ist

$$T_\alpha = \frac{1}{\alpha} E + \frac{\alpha - 1}{\alpha} H$$

genau die Matrix, die Herr I. Schur[7]) in seinem Beweise des Äquivalenzsatzes verwendet: ihre Rolle tritt durch die Einfachheit der zugehörigen Multiplikatoren hier besonders klar hervor.

§ 6.

Wenn in (23) $\Phi(x)$ für $x > 0$ eine stetige Ableitung hat und außer $\int_0^\infty |\Phi(x)|\,dx$ auch $\int_0^\infty |\Phi'(x)|\,dx$ existiert, so ist außer μ_n auch $n\mu_n$ eine eine C-Folge.

Denn es existiert $\int_0^\infty \Phi'(x)\,dx$, also $\Phi(+0)$ und $\Phi(+\infty)$; der letztere Grenzwert muß wegen der Integrabilität von $\Phi(x)$ verschwinden. Aus (23) folgt dann durch partielle Integration

$$n\mu_n = \Phi(+0) + \int_0^\infty e^{-nx} \Phi'(x)\,dx \tag{26}$$

als Summe einer konstanten und einer Momentfolge wie (23).

Hiervon machen wir folgende Anwendung. Bilden wir mit den Funktionen ($\alpha, \beta > 0$)

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x}(1 - e^{-x})^{\beta - 1} : \Gamma(\beta), \qquad \Psi(x) = e^{-x} x^{\beta - 1} : \Gamma(\beta)$$

die Momente

$$\varphi_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}, \qquad \psi_n = \frac{1}{(n+1)^\beta}.$$

Da nun $\Phi(x) : x^{\beta-1}$ und $\Psi(x) : x^{\beta-1}$ an der Stelle $x = 0$ regulär sind mit gleichem konstanten Glied, so sind dort auch

$$[\Phi(x) - \Psi(x)] : x^\beta \quad \text{und} \quad [\Phi'(x) - \Psi'(x)] : x^{\beta-1}$$

---

[7]) K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze, Diss. Berlin 1907. W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes, Math. Ann., **67** (1909), S. 110–125. W. B. Ford, On the relation between the sum-formulas of Hölder and Cesàro, Amer. Journ. of Math., **32** (1910), S. 315–326. I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann., **74** (1913), S. 447–458.

regulär, also $\Phi'(x) - \Psi'(x)$ bis nach $x = 0$ integrabel (die obere Grenze ∞ bedarf keiner Erörterung). Hiernach bildet außer φ_n, ψ_n auch $n(\varphi_n - \psi_n)$ eine reine C-Folge, ebenso

$$(n+\alpha)\varphi_n - (n+1)\psi_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} - (n+1)^{1-\beta}.$$

Speziell für $\alpha + \beta = 1$ (also $0 < \alpha < 1$) ist

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} - (n+1)^{\alpha}$$

eine reine C-Folge; multipliziert man dies mit einer der reinen C-Folgen $1:\binom{n+\alpha}{n}$ oder $(n+1)^{-\alpha}$, so ergibt sich

$$\mu_n = (n+1)^{\alpha} : \binom{n+\alpha}{n}$$

nebst $\frac{1}{\mu_n}$ als normierte C-Folge; die zugehörige Matrix $C_\alpha : H^\alpha$ ist also der Einheitsmatrix normiert äquivalent oder

$$C_\alpha \approx H^\alpha. \tag{27}$$

Dies gilt zunächst für $0 < \alpha \leqq 1$, aber auf Grund von (25) für jedes $\alpha > -1$, womit der Äquivalenzsatz auch auf nicht ganzzahlige Ordnung ausgedehnt ist. Es folgt noch[8]) für α, β, $\alpha + \beta > -1$

$$C_{\alpha+\beta} \approx H^{\alpha+\beta} = H^\alpha H^\beta \approx C_\alpha C_\beta.$$

Wenn in (26) $\Phi(+0) = 0$ und auch noch $\int_0^\infty |\Phi''(x)|\,dx$ existiert, so ist auch noch $n^2\mu_n$ eine C-Folge. Wenn $\Phi(x)$ für $x > 0$ unbeschränkt differenzierbar ist, wenn ferner sämtliche Ableitungen, $\Phi(x)$ selbst eingeschlossen, von 0 bis ∞ absolut integrabel sind und für $x \to 0$ nach 0 konvergieren, so sind

$$\mu_n = \int_0^\infty \Phi(x) e^{-xn}\,dx, \quad n\mu_n = \int_0^\infty \Phi'(x) e^{-xn}\,dx, \quad n^2\mu_n = \int_0^\infty \Phi''(x) e^{-xn}\,dx, \ldots$$

sämtlich Momentfolgen, d. h. die C-Folge μ_n ist stärker als alle Multiplikatorenfolgen der Hölderschen oder Cesàroschen Skala.

Solche Funktionen sind z. B.

$$\Phi(x) = e^{-ax - \frac{b}{x}} x^{\lambda-1} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ \lambda \text{ beliebig}),$$

$$\Phi(x) = e^{-\frac{b}{x}} x^{\lambda-1} \qquad (b > 0,\ \lambda < 0).$$

[8]) Mit der Formel $C_\alpha C_\beta \approx C_{\alpha+\beta}$ für „natürliche" Cesàrosche Matrizen verwandt, aber nicht identisch ist die für „modifizierte" (s. Fußnote [4])) $C_\alpha^* C_\beta^* \approx C_{\alpha+\beta}^*$, die als Spezialfall in einem von Herrn G. Faber, Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte, Münch. Ak. Ber. 1913, S. 519–531, bewiesenen allgemeinen Grenzwertsatz enthalten ist.

peziell erhält man aus

$$\int_0^\infty e^{-ax-\frac{b}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{-2(ab)^{\frac{1}{2}}} b^{-\frac{1}{2}} \qquad (a \geqq 0,\ b > 0),$$

dem man a durch $n+a$ ersetzt, eine reine C-Folge der Gestalt

8) $$\mu_n = e^{-A(n+a)^{\frac{1}{2}}} \qquad (A > 0,\ a \geqq 0),$$

e stärker ist als alle Hölderschen C-Folgen.

In ähnlicher Weise kann man mehrfache Integrale[9]) vom Typus

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax-by-\frac{c}{xy}} x^{\lambda-1} y^{\mu-1}\,dx\,dy$$

handeln ($\lambda - \frac{1}{3}$, $\mu - \frac{2}{3}$ ganzzahlig) und findet so die reinen C-Folgen

9) $$\mu_n = e^{-A(n+a)^{\alpha}} \qquad (A > 0,\ a > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \alpha \text{ rational}),$$

orin speziell für $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ auch $a = 0$ sein darf; wir werden dieses irftige Resultat in § 9 vervollständigen.

§ 7.

Hier ist der Ort, auf die Tatsache hinzuweisen, daß keineswegs, wie an aus der Hölderschen Skala schließen könnte, das infinitäre Verhalten r Multiplikatoren μ_n für ihre Wirksamkeit oder Rangordnung als C-Folgen aßgebend ist; eine zu starke Konvergenz von μ_n nach 0 kann diese Wirkmkeit beeinträchtigen oder aufheben, offenbar weil dann A_p überwiegend n den Anfangsgliedern der Folge a_m abhängt. Als Beispiel betrachten ir die drei Scharen von C-Folgen (vgl. (21), (28))

$$e^{-\alpha\log(n+1)} = (n+1)^{-\alpha}, \quad e^{-\beta n^{\frac{1}{2}}}, \quad e^{-\gamma^n} = \vartheta^n$$
$$(\alpha, \beta, \gamma > 0, \quad 0 < \vartheta < 1),$$

ren Matrizen $H^\alpha, J^\beta, K^\gamma$ heißen mögen. Während nun stets $H^\alpha < J^\beta$ und dem infinitären Verhalten nach auch $J^\beta < K^\gamma$ zu erwarten wäre, in Wahrheit nicht einmal $H^\alpha < K^\gamma$, sondern K^γ mit H^α und J^β stets *vergleichbar.*

Denn zunächst kann nicht $K^\gamma \gtrsim H$ sein. In diesem Fall wäre $+1)\vartheta^n$ oder

$$\mu_n = n\vartheta^n(1-\vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\vartheta^n$$

---

[9]) J. Liouville, Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intéales définies multiples, Journ. de Math. (2), 1 (1856), S. 82–88.

eine C-Folge, also

$$\mu_{m,n} = \vartheta(1-\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}[\vartheta^m(1-\vartheta)^n] = \vartheta^m(1-\vartheta)^n[m-(m+n)\vartheta].$$

Nach (α) müßte

$$M_p = \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\vartheta^m(1-\vartheta)^{p-m}|m-p\vartheta|$$

beschränkt sein, während nach bekannten Abschätzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\frac{M_p}{\sqrt{p}} \to \sqrt{\frac{2\vartheta(1-\vartheta)}{\pi}}.$$

Es ist auch niemals $K^\gamma \gtrsim H^\alpha$, denn durch Erhebung in eine hinlänglich hohe Potenz würde man $K^{m\gamma} \gtrsim H^{m\alpha} > H$ erhalten. Wegen $J^\beta > H^\alpha$ ist auch nicht $K^\gamma \gtrsim J^\beta$.

Andererseits ist natürlich auch nicht $K^\gamma \lesssim J^\beta$, denn $e^{-\beta\sqrt{n}+\gamma n}$ ist gewiß, da es mit n nach ∞ divergiert, keine C-Folge. Um so weniger ist $K^\gamma \lesssim H^\alpha$. Daher ist K^γ mit H^α und mit J^β unvergleichbar.

Während hier ϑ^n noch wenigstens eine C-Folge war, kann diese Eigenschaft bei noch stärkerem Verschwinden von $\lim \mu_n$ auch ganz verloren gehen. Wir wollen z. B. zeigen, daß $1 : n!$ keine C-Folge ist.

Aus (10) erhält man

$$\varphi(z) = \sum_n (-1)^n \mu_n \frac{z^n}{n!} = e^{-z}\sum_n \mu_{0,n}\frac{z^n}{n!}$$

und durch Erhöhung der Indizes um m

$$(30)\qquad \begin{cases} (-1)^m \varphi^{(m)}(z) = \sum_n (-1)^n \mu_{m+n}\frac{z^n}{n!} = e^{-z}\sum_n \mu_{m,n}\frac{z^n}{n!}, \\ (-1)^m \frac{z^m}{m!}\varphi^{(m)}(z) = e^{-z}\sum_n \binom{m+n}{m}\mu_{m,n}\frac{z^{m+n}}{(m+n)!} \\ \qquad\qquad = e^{-z}\sum_p \binom{p}{m}\mu_{m,p-m}\frac{z^p}{p!}. \end{cases}$$

Ist nun μ_m eine C-Folge, so ist nach (β) $\lim_p \binom{p}{m}\mu_{m,p-m} = l_m$ und es muß dann auch der Borelsche Grenzwert dieser Folge, d. h. der Limes der rechten Seite von (30) für $z \to \infty$ oder

$$\lim_{z\to\infty} z^m \varphi^{(m)}(z) = (-1)^m m!\, l_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

existieren. Da dies z. B. für

$$\mu_n = \frac{n!}{(2n)!}, \qquad \varphi(z) = \cos\sqrt{z},$$

$$\mu_n = \frac{n!}{(2n+1)!}, \qquad \varphi(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

icht zutrifft, so bilden diese μ_n keine C-Folgen. Andererseits sind 4^{-n} nd $1 : \binom{n+\frac{1}{2}}{n} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$ C-Folgen, und mit $\frac{1}{n!}$ müßte auch das Produkt ieser drei, also $\frac{n!}{(2n+1)!}$ eine C-Folge sein, demnach ist auch $\frac{1}{n!}$ keine.

Für die Momentfolge (20) einer monotonen Funktion $\chi(u)$ erhält nan $(0 < \vartheta < 1)$

$$\mu_n \geqq [\chi(1) - \chi(\vartheta)]\,\vartheta^n,$$

o daß, wenn $\chi(u)$ im Intervall $\vartheta \leqq u \leqq 1$ nicht konstant ist, μ_n nicht tärker als ϑ^n nach 0 konvergieren kann. Der Konvergenzradius von $\sum \mu_n x^n$ ist dann gewiß $\leqq 1 : \vartheta$, und diese Reihe kann nur dann eine ganze unktion sein, wenn $\chi(u)$ für $0 < u \leqq 1$ konstant ist, also alle μ_n bis uf höchstens μ_0 verschwinden.

§ 8.

Mittels geeigneter Momentfolgen können wir die Höldersche Skala ı einer *logarithmischen* Skala von bekanntem Bau ausfüllen, bei der uch, im Gegensatz zu dem in § 7 Gesagten, die Rangordnung der Multiplikatorenfolgen als C-Folgen genau mit ihrer infinitären Rangordnung übernstimmt.

Es bedeute l_k den iterierten Logarithmus und

$$e_0 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = e, \quad e_{k+1} = e^{e_k},$$

o daß $l_k a$ für $a > e_{k-1}$ reell, für $a > e_k$ positiv ist. Man hat für $> 0,\ y > 0$:

31)
$$\int_0^\infty dx \frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)} e^{-xa} = a^{-y} = e^{-y l a};$$

ır $a > 1,\ z > 0$:

32)
$$\int_0^\infty dy \frac{y^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dx \frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)} e^{-xa} = [la]^{-z} = e^{-z l_2 a};$$

r $a > e,\ u > 0$:

33)
$$\int_0^\infty dz \frac{z^{u-1}}{\Gamma(u)} \int_0^\infty dy \frac{y^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dx \frac{x^{y-1}}{\Gamma(y)} e^{-xa} = [l_2 a]^{-u} = e^{-u l_3 a}$$

f. Ersetzt man a durch $n + a$, so sind also nach (24)

$$[n+a]^{-y}, \quad [l(n+a)]^{-z}, \quad [l_2(n+a)]^{-u}, \ldots, [l_k(n+a)]^{-y_k}$$

ine C-Folgen (die letzte für $y_k > 0,\ a > e_k$), denn aus der Existenz der erierten Integrale folgt, da der Integrand positiv ist, die Existenz der treffenden mehrfachen Integrale.

Multipliziert man (31) mit $\Gamma(y)$ und differenziert nach y, so kommt

$$\int_0^\infty dx \log x\, x^{y-1} e^{-xa} = e^{-yla}[\Gamma'(y) - \Gamma(y) la],$$

woraus, mit Ersetzung von a durch $n+a$, folgt, daß auch

$$[n+a]^{-y} l(n+a)$$

für $a>0$, $y>0$ eine C-Folge ist. Durch Erhebung in eine ganze Potenz und Multiplikation mit $[l(n+a)]^{-z}$ $(z>0)$ ergibt sich, daß

$$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-z}$$

für $a>1$, $y>0$ und *beliebiges* z eine C-Folge ist. Operiert man ebenso an (32), so ergibt sich

$$[l(n+a)]^{-z}[l_2(n+a)]^{-u}$$

für $a>e$, $z>0$ und beliebiges u als C-Folge; sodann ist für $a>e$, $y>0$, beliebiges z und u

$$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-z}[l_2(n+a)]^{-u}$$
$$=(n+a)^{-y}[l(n+a)]^{-z+1}\cdot[l(n+a)]^{-1}[l_2(n+a)]^{-u}$$

eine C-Folge. So fortfahrend erhält man

$$[n+a]^{-y}[l(n+a)]^{-y_1}\dots[l_k(n+a)]^{-y_k} \tag{34}$$

als reine C-Folge, falls $a>e_k$ und der erste nicht verschwindende der Exponenten $y, y_1, \dots, y_k$ positiv ist.

Ferner folgt aus (31) für $a, b, y>0$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{y-1}}{\Gamma(y+1)} \frac{e^{-xa}-e^{-xb}}{x} = \frac{a^{-y}-b^{-y}}{y}$$

und diese Formel gilt auch noch für $y>-1$ $(y\neq 0)$. Verwandelt man y in $-y$ und nimmt dann $0<y<1$, so ergibt sich also (a, b durch $n+a$, $n+b$ ersetzt)

$$(n+b)^y-(n+a)^y$$

und nach Multiplikation mit $(n+b)^{-y}$ auch

$$(n+a)^y:(n+b)^y$$

als C-Folge, zunächst für $0<y<1$, durch Potenzierung für $y>0$ und durch Vertauschung von a, b für jedes y. Genau ebenso zeigt sich

$$[l_k(n+a)]^{y_k}:[l_k(n+b)]^{y_k}$$

für $a, b>e_k$ und beliebiges y_k als C-Folge, womit wir statt (34) die allgemeinere reine C-Folge

35) $$\varphi_n = [n+a]^{-\nu}[l(n+a_1)]^{-\nu_1}\dots[l_k(n+a_k)]^{-\nu_k}$$

halten, falls $a > 0$, $a_1 > 1, \dots, a_k > e_k$ und der erste nicht verschwindende er Exponenten $y, y_1, \dots, y_k$ positiv ist. Ist

$$\psi_n = [n+b]^{-z}[l(n+b_1)]^{-z_1}\dots[l_k(n+b_k)]^{-z_k}$$

n zweiter Ausdruck dieser Form (die Faktorenzahl kann in beiden gleich genommen werden), so ist $\frac{\psi_n}{\varphi_n}$ eine C-Folge $\left(\frac{\varphi_n}{\psi_n}\right.$ aber keine$\left.\right)$, falls die rste nicht verschwindende der Differenzen $z-y, z_1-y_1, \dots, z_k-y_k$ ositiv ist, während bei Gleichheit aller Exponenten sowohl $\frac{\psi_n}{\varphi_n}$ wie $\frac{\varphi_n}{\psi_n}$ -Folgen sind. D. h. die Rangordnung der φ_n als C-Folgen ist dieselbe ie die ihres infinitären Verhaltens.

§ 9.

Jede total monotone Folge $(\mu_{m,n} \geqq 0)$ ist eine C-Folge, da hier (α) egen (14) erfüllt ist. Um total monotone Folgen zu erhalten, verstehen ir unter $\mu(t)$ eine für $t \geqq 0$ stetige, für $t > 0$ unbeschränkt differenzier- are Funktion mit

36) $$(-1)^n \mu^{(n)}(t) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

nd setzen

37) $$\mu_m = \mu(m);$$

bekanntlich $(n \geqq 1)$

$$\mu_{m,n} = (-1)^n \mu^{(n)}(t)$$

ein Wert zwischen m und $m+n$), so ist μ_m total monoton. Wir ommen auf diese „total monotonen" Funktionen $\mu(t)$ am Ende von § 10 rück und werden dann auch zeigen, daß wegen der hier vorausgesetzten etigkeit bei $t = 0$ die Folge (37) eine *reine* C-Folge ist.

Die Bedingung (36) ist erfüllt, wenn wir setzen

38) $$\mu(t) = e^{\varrho(t)}, \qquad (-1)^n \varrho^{(n)}(t) \geqq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

ie aus

$$\mu' = e^{\varrho}\varrho', \qquad \mu'' = e^{\varrho}(\varrho'' + \varrho'^2), \qquad \mu''' = e^{\varrho}(\varrho''' + 3\varrho'\varrho'' + \varrho'^3), \dots$$

rvorgeht. Wir geben zwei Beispiele: das eine liefert einen neuen Beweis s Äquivalenzsatzes, das andere eine Vervollständigung unserer Ergebnisse er Exponentialfolgen (§ 6).

Für

α) $$\varrho(t) = \log\Gamma(\alpha+t) - \log\Gamma(\beta+t) + (\beta-\alpha)\log(1+t) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

ist

$$-\varrho'(t)=\frac{\Gamma'(\beta+t)}{\Gamma(\beta+t)}-\frac{\Gamma'(\alpha+t)}{\Gamma(\alpha+t)}-\frac{\beta-\alpha}{1+t}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\alpha+t}-\frac{1}{m+\beta+t}\right)-\frac{\beta-\alpha}{1+t}$$

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t):(n-1)!=\sum_{m=0}^{\infty}[(m+\alpha+t)^{-n}-(m+\beta+t)^{-n}]-(\beta-\alpha)(1+$$

Da die zweite Ableitung von t^{-n} $(t>0)$ positiv, diese Funktion nach oben konkav ist, gilt für $0<\alpha<\beta<\gamma$

$$\begin{vmatrix}\alpha^{-n} & \alpha & 1\\ \beta^{-n} & \beta & 1\\ \gamma^{-n} & \gamma & 1\end{vmatrix}<0,$$

insbesondere für $\gamma=\alpha+1$, also $0<\beta-\alpha<1$

$$\alpha^{-n}-\beta^{-n}>(\beta-\alpha)[\alpha^{-n}-(\alpha+1)^{-n}]$$

und hierin kann man die Argumente α, β um $m+t$ vermehren. Daher

$$(-1)^n\varrho^{(n)}(t):(n-1)!(\beta-\alpha)>\sum_{m=0}^{\infty}[(m+\alpha+t)^{-n}-(m+1+\alpha+t)^{-n}]-(1+$$

$$=(\alpha+t)^{-n}-(1+t)^{-n}$$

und dies ist $\geqq 0$, falls $\alpha\leqq 1$ angenommen wird. Mit Einschließung der trivialen Grenzfälle haben wir also für

$$0<\alpha\leqq 1,\qquad 0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$$

$(-1)^n\varrho^{(n)}(t)\geqq 0$ und es ist

$$\mu_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)}(n+1)^{\beta-\alpha}$$

oder nach Anbringung eines positiven Faktors

$$\binom{\alpha+n-1}{n}(n+1)^{\beta-\alpha}:\binom{\beta+n-1}{n}$$

eine total monotone Folge, $C_{\beta-1}:C_{\alpha-1}H^{\beta-\alpha}$ oder

$$C_{\alpha+\gamma-1}:C_{\alpha-1}H^{\gamma}\qquad(0<\alpha\leqq 1,\quad 0\leqq\gamma\leqq 1)$$

eine reine C-Matrix. Speziell (für $\alpha=1$ oder $\gamma=1-\alpha$) sind

$$C_\alpha:H^\alpha,\quad H^{\alpha-1}:C_{\alpha-1}\qquad(0<\alpha\leqq 1)$$

C-Matrizen[10]; in Verbindung mit (25) folgt daraus, daß $C_\alpha:H^\alpha$ und $H^\alpha:C_\alpha$ für $\alpha>-1$ (normierte) C-Matrizen sind, also $C_\alpha\approx H^\alpha$.

[10]) Daß diesen total monotone Multiplikatorenfolgen entsprechen, kann man nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn I. Schur noch elementarer beweisen.

Für

$$\varrho(t) = -A(t+a)^{\alpha} \qquad (A>0,\ a\geqq 0,\ 0<\alpha<1)$$

$$(-1)^n \varrho^{(n)}(t) = A\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)(t+a)^{\alpha-n}$$
$$= A\alpha\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}:(t+a)^{n-\alpha}>0,$$

so ist die *Exponentialfolge*

$$e^{-A(n+a)^{\alpha}} \qquad (A>0,\ a\geqq 0,\ 0<\alpha<1)$$

tal monoton. Prüfen wir ferner

$$\varrho(t) = -A(t+a)^{\alpha} + B(t+b)^{\beta}$$

nd nehmen alsbald

$$A>0, \quad B>0, \quad 0\leqq a<b, \quad 0<\beta<\alpha<1$$

, so wird

$$(-1)^n \varrho^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{A\alpha}{(t+a)^{n-\alpha}} - \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\frac{B\beta}{(t+b)^{n-\beta}}$$

nd (38) verlangt, daß

$$\frac{B}{A}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\beta)}\frac{(t+b)^{n-\beta}}{(t+a)^{n-\alpha}}$$

r $n=1,2,3,\dots$ und $t>0$. Der Quotient $(t+b)^{n-\beta}:(t+a)^{n-\alpha}$ ist r $t>-a$ positiv und divergiert nach ∞ für $t\to -a$ und $t\to\infty$; sein inimum für $t>-a$ ist

$$\left(\frac{b-a}{\alpha-\beta}\right)^{\alpha-\beta}\frac{(n-\beta)^{n-\beta}}{(n-\alpha)^{n-\alpha}}$$

nd unsere Bedingung ist also gewiß erfüllt, wenn für $n=1,2,3,\dots$

$$B:A(b-a)^{\alpha-\beta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\beta)}\frac{(n-\beta)^{n-\beta}}{(n-\alpha)^{n-\alpha}}.$$

ier hat der Ausdruck rechts für $n\to\infty$ einen positiven Grenzwert, die chte Seite der folgenden Ungleichung, und daher für $n=1,2,3,\dots$ ne positive untere Grenze

$$c_{\alpha,\beta}\leqq\frac{\alpha}{\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha-\beta}\right)^{\alpha-\beta}.$$

emnach ist

$$e^{-A(n+a)^{\alpha}+B(n+b)^{\beta}}$$

ter den Bedingungen (40) und

$$B\leqq A(b-a)^{\alpha-\beta}c_{\alpha,\beta}$$

eine total monotone Folge, d. h. von den Exponentialfolgen

$$e^{-A(n+a)^\alpha}, \quad e^{-B(n+b)^\beta}$$

die erstere die stärkere; dabei muß also, bei Festhaltung der übrigen Parameter, b oder A über einer gewissen unteren Grenze liegen, und da $c_{\alpha,\beta}$ für $\alpha \to 1$ nach 0 konvergiert, so rückt diese Grenze bei Annäherung von α an 1 ins Unendliche. Allerdings sind unsere jetzigen Bedingungen nur hinreichend, nicht notwendig; immerhin erhalten wir doch eine Bestätigung der uns schon bekannten Tatsache, daß die Exponentialfolge (39) für $\alpha = 1$ ihre Stärke verliert.

Ähnlich wie das letzte Beispiel (oder durch Grenzübergang) ist

$$\varrho(t) = -A(t+a)^\alpha + B\log(t+b)$$

zu behandeln, wieder unter den Bedingungen (40) (die letzte durch $0 < \alpha < 1$ zu ersetzen); statt (41) kommt

$$B \leqq A(b-a)^\alpha c_\alpha, \quad 0 < c_\alpha \leqq \alpha^{1-\alpha} e^\alpha : \Gamma(1-\alpha).$$

Es ist also

$$e^{-A(n+a)^\alpha}(n+b)^B$$

eine C-Folge, sobald bei Fixierung der übrigen Parameter b eine gewisse Grenze übertrifft; da aber $(n+c)^B : (n+b)^B$ bei beliebigen $b, c > 0$ eine C-Folge ist (§ 8), ist jene Bedingung überflüssig. D. h. die Exponentialfolge (39) ist stärker als alle C-Folgen $(n+b)^{-B}$, insbesondere als alle Multiplikatorenfolgen der Hölderschen Skala.

§ 10.

Zum Abschluß dieser Untersuchung beweisen wir noch die Umkehrung von II:

Satz III. *Jede C-Folge ist eine Momentfolge.*

D. h. wenn die Zahlen μ_n der Bedingung (α) genügen, so lassen sie sich als die Momente (20) einer Funktion $\chi(u)$ darstellen, die für $0 \leqq u \leqq 1$ von beschränkter Schwankung ist; wir werden überdies sehen, daß $\chi(u)$ im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

Zunächst zeigen wir, daß ein im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ positives Polynom $f(u)$ in der Form

$$f(u) = \sum_{m=0}^{p} a_m u^m (1-u)^{p-m} \tag{42}$$

mit positiven Koeffizienten a_m dargestellt werden kann.

Ist $f(u)$ linear, so hat man

$$f(u) = a_0(1-u) + a_1 u,$$

wo $a_0 = f(0)$ und $a_1 = f(1)$ positiv sind.

Ist $f(u)$ irreduzibel quadratisch,

$$f(u) = \alpha + 2\beta u + \gamma u^2 \qquad (\alpha, \gamma, \alpha\gamma - \beta^2 > 0),$$

o setze man mit noch zu bestimmendem $p \geqq 2$

$$f(u) = \alpha \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m}$$

$$+ 2\beta u \sum_{m=1}^{p} \binom{p-1}{m-1} u^{m-1} (1-u)^{p-m}$$

$$+ \gamma u^2 \sum_{m=2}^{p} \binom{p-2}{m-2} u^{m-2} (1-u)^{p-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \frac{(p-2)!}{m!\,(p-m)!} u^m (1-u)^{p-m}$$

$$[p(p-1)\alpha + 2m(p-1)\beta + m(m-1)\gamma].$$

Der Ausdruck in eckiger Klammer

$$p(p-1)\alpha + m(2p\beta - 2\beta - \gamma) + m^2\gamma$$

oll für $m = 0, 1, \ldots, p$ positiv werden; wir können ihn sogar für jedes eelle m positiv machen, indem wir seine Determinante

$$p(p-1)\alpha\gamma - \tfrac{1}{4}(2p\beta - 2\beta - \gamma)^2$$
$$= p^2(\alpha\gamma - \beta^2) + p(2\beta^2 + \beta\gamma - \alpha\gamma) - \tfrac{1}{4}(2\beta + \gamma)^2$$

positiv machen, was für hinlänglich großes p der Fall ist.

Also gestatten lineare und irreduzibel quadratische Polynome die gewünschte Darstellung, und durch Multiplikation solcher ergibt sie sich für beliebige $f(u)$.

Wir beweisen III nun zunächst für total monotone Folgen μ_n und schließen dabei den trivialen Fall des Verschwindens aller $\mu_{m,n}$, d. h. nach (14) das Verschwinden von μ_0 aus; es können dann auch nicht alle Zahlen $\mu_{0,p}, \ldots, \mu_{p,0}$ einer Diagonale der Matrix $(\mu_{m,n})$ verschwinden.

Ordnen wir jedem Polynom

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_n u^n$$

die Zahl

$$Mf = \alpha_0\mu_0 + \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n$$

u, so hat diese lineare Funktionaloperation die Eigenschaft: *wenn* $f(u)$ *im Intervall* $0 \leqq u \leqq 1$ *positiv ist, so ist* $Mf > 0$. Denn aus der Darstellung 42) folgt

$$Mf = \sum_{m=0}^{p} a_m \mu_{m,p-m} > 0$$

($Mf = 0$ würde das Verschwinden aller $\mu_{m,p-m}$ für $m = 0, 1, \ldots, p$ bedingen). *Wenn $f(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ nicht negativ ist, so ist* $Mf \geqq 0$. Denn $\varepsilon + f(u)$ ist dann positiv, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, also $\varepsilon\mu_0 + Mf > 0$ und daher $Mf \geqq 0$.

Insbesondere sind für

$$f(u) = (x_0 + x_1 u + \ldots + x_n u^n)^2, \quad g(u) = u(x_0 + x_1 u + \ldots + x_n u^n)^2$$

die beiden Formen

$$(43) \qquad Mf = \sum_0^n \mu_{i+k} x_i x_k, \quad Mg = \sum_0^n \mu_{i+k+1} x_i x_k$$

der reellen Variablen $x_0, \ldots, x_n$ für jedes n nicht negativ. Nehmen wir zunächst an, sie seien für jedes n definit positiv, so gibt es nach der Stieltjesschen Kettenbruchtheorie[11]) gewiß eine Lösung des Momentproblems, d. h. eine für $u \geqq 0$ monotone (nicht abnehmende) Funktion $\chi(u)$ derart, daß

$$\mu_n = \int_0^\infty u^n \, d\chi(u).$$

Hier ist aber gewiß $\chi(u)$ für $u > 1$ konstant; denn für $1 < \alpha < \beta$, $\chi(\alpha) < \chi(\beta)$ würde

$$\mu_{m,1} = \int_0^1 u^m (1-u) \, d\chi(u) - \int_1^\infty u^m (u-1) \, d\chi(u)$$

$$\leqq \int_0^1 d\chi(u) - \alpha^m (\alpha - 1) \int_\alpha^\beta d\chi(u)$$

mit $m \to \infty$ nach $-\infty$ divergieren, während $\mu_{m,n} \geqq 0$ sein soll. Setzen wir also, unter eventueller, für die Momente belangloser Abänderung von $\chi(u)$ für Sprungstellen, $\chi(1) = \chi(1+0)$, so ist

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u)$$

und, da es sich demgemäß um ein endliches Intervall handelt, so tritt der Stieltjessche Bestimmtheitsfall (Konvergenz des Kettenbruchs) ein: das Momentproblem hat, von einer additiven Konstanten und von den Sprungstellen abgesehen, nur eine Lösung $\chi(u)$. Man kann das so ausdrücken: setzen wir $\chi(0) = 0$ und präzisieren $\chi(u)$ für $0 < u < 1$ durch

[11]) T. J. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Toulouse, 8 (1894), S. 1–122; 9 (1895), S. 1–47. Vgl. auch O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Teubner, 1913), Kap. 9. In § 11 beweisen wir Satz III ohne Berufung auf die Stieltjessche Theorie.

lie *Forderung des arithmetischen Mittels*

$$\chi(u) = \tfrac{1}{2}\chi(u-0) + \tfrac{1}{2}\chi(u+0),$$

o ist $\chi(u)$ durch die vorgeschriebenen Momente eindeutig bestimmt für $0 \leqq u \leqq 1$. Wir wollen auch im folgenden $\chi(u)$ durch irgendwelche Vorschriften eindeutig bestimmt nennen, wenn es durch diese Vorschriften, owie $\chi(0) = 0$ und die Bedingung des arithmetischen Mittels eindeutig estimmt ist.

Den Fall, daß die quadratischen Formen Mf, Mg semidefinit werden önnen, kann man durch Grenzübergang erledigen. Ersetzen wir μ_n durch

$$\mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1} = \mu_n + \varepsilon \int_0^1 u^n \, du \qquad (\varepsilon > 0),$$

o ist Mf durch

$$Mf + \varepsilon \int_0^1 f(u) \, du$$

u ersetzen, und wenn $f(u) \geqq 0$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$, so wird dieser Ausdruck positiv, außer wenn $f(u)$ durchweg verschwindet; die zugehörigen n Stelle von (43) auftretenden quadratischen Formen werden also jetzt efinit, und es gibt eine eindeutig bestimmte monotone Funktion $\chi(u, \varepsilon)$ nit

$$\mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1} = \int_0^1 u^n \, d\chi(u, \varepsilon).$$

st $0 < \delta < \varepsilon$, so schließen wir aus

$$\mu_n + \frac{\delta}{n+1} + (\varepsilon - \delta)\frac{1}{n+1} = \mu_n + \frac{\varepsilon}{n+1}$$

ieder wegen der Bestimmtheit des Momentproblems auf

$$\chi(u, \delta) + (\varepsilon - \delta)u = \chi(u, \varepsilon),$$

. h. die Funktion

$$\chi(u) = \chi(u, \delta) - \delta u = \chi(u, \varepsilon) - \varepsilon u$$

ängt in Wahrheit von ε nicht ab und es ist

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u).$$

Aus der Monotonie von $\chi(u, \varepsilon) = \chi(u) + \varepsilon u$ geht für $\varepsilon \to 0$ die von (u) hervor. Also sind auch in diesem Falle die μ_n die Momente einer indeutig bestimmten monotonen Funktion $\chi(u)$, die hier bekanntlich nur ndlich viele Wachstumsstellen haben kann, d. h. endlich viele Sprünge nacht und sonst konstant ist.

Also: jede total monotone Folge μ_n ist Momentfolge einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion $\chi(u)$.

Eine reelle C-Folge μ_n ist (§ 3) Differenz total monotoner Folgen: $\mu_n = \alpha_n - \beta_n$; hier sind die α_n, β_n Momente monotoner Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$ und daher die μ_n Momente einer Funktion $\chi(u) = \alpha(u) - \beta(u)$ von beschränkter Schwankung. Wenn wir diese Funktionen wieder durch Verschwinden an der Stelle $u = 0$ und durch die Forderung des arithmetischen Mittels präzisieren, so ist auch jetzt $\chi(u)$ eindeutig bestimmt, denn ist $\mu_n = \alpha_n^* - \beta_n^*$ eine zweite Darstellung, so ist die total monotone Folge

$$\alpha_n + \beta_n^* = \alpha_n^* + \beta_n$$

Momentfolge einer eindeutig bestimmten monotonen Funktion

$$\alpha(u) + \beta^*(u) = \alpha^*(u) + \beta(u),$$

also $\chi(u) = \chi^*(u)$. Den in § 3 angegebenen kleinsten total monotonen Folgen α_n, β_n entsprechen offenbar die kleinsten monotonen Funktionen $\alpha(u), \beta(u)$, wobei also $\alpha(u) + \beta(u) = \int_0^u |d\chi(u)|$ die totale Variation von $\chi(u)$ im Intervall $[0, u]$ ist.

Damit ist III für reelle C-Folgen bewiesen und überträgt sich unmittelbar auf komplexe. *C-Folgen und Momentfolgen sind identisch.*

Aus der Bestimmtheit des Momentproblems ziehen wir noch folgenden Schluß. Es ist stets, und zwar nur auf eine einzige Weise, möglich, in eine gegebene C-Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ solche Zahlen $\mu_{\frac{1}{2}}, \mu_{\frac{3}{2}}, \ldots$ einzuschieben, daß $\mu_0, \mu_{\frac{1}{2}}, \mu_1, \mu_{\frac{3}{2}}, \ldots$ eine C-Folge wird. Denn macht man den Ansatz

$$\mu_{\frac{n}{2}} = \int_0^1 v^n \, d\psi(v) = \int_0^1 u^{\frac{n}{2}} \, d\psi(u^{\frac{1}{2}}) = \int_0^1 u^{\frac{n}{2}} \, d\chi(u),$$

so ist $\chi(u)$, und damit die $\mu_{\frac{n}{2}}$, bereits durch die Momente μ_n mit ganzen Indizes bestimmt, und andererseits liefert dieser Ansatz wirklich eine C-Folge $\mu_{\frac{n}{2}}$; nämlich die Momentfolge der Funktion $\psi(v) = \chi(v^2)$. Ebenso läßt sich μ_n für alle rationalen positiven Indizes eindeutig derart interpolieren, daß $\mu_0, \mu_t, \mu_{2t}, \mu_{3t}, \ldots$ für rationales $t > 0$ eine C-Folge ist.

Nennen wir eine für $t \geqq 0$ definierte, für $t > 0$ stetige Funktion $\mu(t)$ eine (reine) *C-Funktion*, speziell eine *total monotone Funktion*, wenn für jedes rationale positive t die Folge $\mu(0), \mu(t), \mu(2t), \ldots$ eine (reine) C-Folge, speziell eine total monotone Folge ist, so folgt aus dem Gesagten, daß es zu einer C-Folge μ_n höchstens eine einzige C-Funktion $\mu(t)$ mit $\mu(n) = \mu_n$ geben kann. Andererseits gibt es aber wirklich eine, nämlich die *Momentfunktion*

44) $$\mu(t)=\int_0^1 u^t\,d\chi(u)=\mu_{0,0}-\binom{t}{1}\mu_{0,1}+\binom{t}{2}\mu_{0,2}-\dots,$$

o $\chi(u)$ die Funktion mit den Momenten μ_n ist[12]); denn offenbar ist $\mu(nt)$ ogar für jedes $t>0$ eine C-Folge, und $\mu(t)$ ist für $t>0$ nicht nur etig, sondern sogar unbeschränkt differenzierbar (mehr noch: für $\Re t>0$ gulär) mit

$$\mu^{(n)}(t)=\int_0^1 u^t(\log u)^n\,d\chi(u).$$

Einer monotonen Funktion $\chi(u)$ entspricht eine total monotone unktion $\mu(t)$ und umgekehrt. An der Stelle $t=0$ macht $\mu(t)$ denlben Sprung wie $\chi(u)$ an der Stelle $u=0$:

45) $$\mu(0)-\mu(+0)=\chi(+0)-\chi(0).$$

Es genügt, dies für monotones $\chi(u)$ zu zeigen. Für $t>0$, $0<\delta<1$ lgt aus

$$\mu(0)-\mu(t)=\Big(\int_0^\delta+\int_\delta^1\Big)(1-u^t)\,d\chi(u)$$

nerseits

$$\mu(0)-\mu(t)\geqq(1-\delta^t)[\chi(\delta)-\chi(0)],$$

ndererseits

$$\mu(0)-\mu(t)\leqq[\chi(\delta)-\chi(0)]+(1-\delta^t)[\chi(1)-\chi(\delta)].$$

äßt man in der ersten Ungleichung erst δ, dann t nach 0 konvergieren, der zweiten umgekehrt, so kommt

$$\mu(0)-\mu(+0)\geqq \quad\text{und}\quad \leqq\chi(+0)-\chi(0).$$

Je nachdem $\chi(+0)-\chi(0)=l_0=\lim\mu_{0,n}$ verschwindet oder nicht, t die Folge μ_n rein oder unrein, und dies gilt offenbar zugleich für alle olgen $\mu(nt)$; d. h. wir haben eine reine oder unreine C-Funktion $\mu(t)$, it lauter reinen oder lauter unreinen C-Folgen $\mu(nt)$, je nachdem $\mu(t)$ der Stelle $t=0$ stetig oder unstetig ist. Die in § 9 verwendeten tal monotonen Funktionen $\mu(t)$, die bei $t=0$ stetig angenommen waren, nd reine C-Funktionen und liefern reine C-Folgen μ_n.

---

[12]) Die Reihe für $\mu(t)$ erhält man durch Integration der gleichmäßig konvernten Binomialreihe

$$u^t=[1-(1-u)]^t=1-\binom{t}{1}(1-u)+\binom{t}{2}(1-u)^2-\dots$$

§ 11.

Der Satz III oder das Momentproblem für ein endliches Intervall (das man ja linear auf das Intervall $[0,1]$ transformieren kann) läßt sich auch ohne Berufung auf die etwas verwickelte Stieltjessche Theorie und ihre Vorstufen (Tschebyscheff, Markoff) in nahezu elementarer Weise behandeln. Wir zeigen zuerst, daß eine total monotone Folge Momentfolge einer monotonen Funktion $\chi(u)$ ist, für die wir einen äußerst einfachen Ausdruck geben, sodann, daß diese Funktion eindeutig bestimmt ist.

Aus der Identität

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} (m-pu)^2 = pu(1-u)$$

schließen wir $(0 \leqq u \leqq 1,\ \varepsilon > 0)$

$$pu(1-u) \geqq \sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} (m-pu)^2$$

$$\geqq p^2\varepsilon^2 \sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m},$$

$$\sum^{*} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2},$$

wo die Summe $\sum^{*}$ nur über die Werte m mit $|m-pu| \geqq p\varepsilon$ zu erstrecken ist. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dies die einfachste Aussage des Gesetzes der großen Zahlen: wenn ein Ereignis die Wahrscheinlichkeit u hat, so konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß seine relative Häufigkeit $\frac{m}{p}$ bei p Versuchen sich von u um mindestens (weniger als) ε unterscheide, für $p \to \infty$ nach $0(1)$. Hieraus folgt übrigens sehr einfach, daß für eine in $0 \leqq u \leqq 1$ stetige Funktion $g(u)$ das Polynom

$$g_p(u) = \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} g\left(\frac{m}{p}\right)$$

gleichmäßig nach $g(u)$ konvergiert[13]).

Nun sei $0 \leqq \xi < \eta \leqq 1$, $\eta - \xi = 2\varepsilon$. In jedem der beiden Fälle

$$m \leqq p\xi, \qquad \xi + \varepsilon \leqq u,$$
$$m \geqq p\eta, \qquad \eta - \varepsilon \geqq u$$

[13]) S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstraß, fondée sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Charkow (2) 13 (1912), S. 1–2.

t auch $|m - pu| \geqq p\varepsilon$, also

46)
$$\begin{cases} \sum\limits_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \dfrac{u(1-u)}{p\varepsilon^2} & (\xi + \varepsilon \leqq u \leqq 1), \\ \sum\limits_{m \geqq p\eta} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq \dfrac{u(1-u)}{p\varepsilon^2} & (0 \leqq u \leqq \eta - \varepsilon), \end{cases}$$

nd wenn wir in der zweiten Gleichung die natürliche Zahl p durch eine ndere q ersetzen und $r = \min[p, q]$ nehmen, so ist *im ganzen Intervall* $\leqq u \leqq 1$

$$\sum_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} + \sum_{m \geqq q\eta} \binom{q}{m} u^m (1-u)^{q-m} \leqq 1 + \frac{u(1-u)}{r\varepsilon^2}$$

der

47)
$$\sum_{m \leqq p\xi} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} - \sum_{m < q\eta} \binom{q}{m} u^m (1-u)^{q-m} \leqq \frac{u(1-u)}{r\varepsilon^2}.$$

Wir machen nun wie in § 10 den Übergang von einem Polynom $(u) \geqq 0$ zu dem Ausdruck $Mf \geqq 0$. Setzen wir

48)
$$\begin{cases} \varphi_p(u) = \sum\limits_{m < pu} \binom{p}{m} \mu_{m, p-m}, & \varphi(u) = \underline{\lim}\, \varphi_p(u), \\ \psi_p(u) = \sum\limits_{m \leqq pu} \binom{p}{m} \mu_{m, p-m}, & \psi(u) = \overline{\lim}\, \psi_p(u), \end{cases}$$

liefert (47)

$$\psi_p(\xi) - \varphi_q(\eta) \leqq \frac{\mu_{11}}{r\varepsilon^2}.$$

Hieraus folgt für $q \to \infty$

$$\psi_p(\xi) \leqq \varphi(\eta) + \frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2}$$

nd sodann für $p \to \infty$

$$\psi(\xi) \leqq \varphi(\eta) \qquad (0 \leqq \xi < \eta \leqq 1),$$

lso offenbar

$$\varphi(\xi) \leqq \psi(\xi) \leqq \varphi(\eta) \leqq \psi(\eta).$$

eide Funktionen sind monoton; läßt man η nach ξ oder ξ nach η konergieren, so kommt

$$\varphi(\xi) \leqq \psi(\xi) \leqq \varphi(\xi + 0), \quad \psi(\eta - 0) \leqq \varphi(\eta) \leqq \psi(\eta),$$

nd durch Wiederholung

$$\varphi(\xi + 0) = \psi(\xi + 0), \quad \varphi(\eta - 0) = \psi(\eta - 0).$$

eide Funktionen haben also im Intervall $[0, 1]$ dieselben Stetigkeitsstellen und an ihnen die gleichen Werte. Da, wo $\varphi(u) = \psi(u)$, also indestens an den Stetigkeitsstellen, ist nach (48)

9)
$$\varphi(u) = \lim \varphi_p(u), \quad \psi(u) = \lim \psi_p(u);$$

wir wollen noch zeigen, daß diese Beziehungen im ganzen Intervall gelten und daß $\varphi(u) = \psi(u)$ für $0 < u < 1$, auch an den Unstetigkeitsstellen. Zunächst ist an den Intervallgrenzen

$$\begin{aligned} \varphi_p(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, \\ \varphi_p(1) &= \mu_0 - \mu_{p,0}, & \varphi(1) &= \mu_0 - \lim \mu_{p,0}, \\ \psi_p(0) &= \mu_{0,p}, & \psi(0) &= \lim \mu_{0,p}, \\ \psi_p(1) &= \mu_0, & \psi(1) &= \mu_0. \end{aligned}$$

Sei sodann $0 < \xi < 1$ und $f(u)$ ein für $0 \leqq u \leqq 1$ nicht negatives Polynom; ε sei so klein gewählt, daß, bei vorgeschriebenem $\sigma > 0$, $f(u) \geqq f(\xi) - \sigma$ für $|u - \xi| \leqq 2\varepsilon$. Dann ist, wenn die Summe $\overset{*}{\Sigma}$ über die Werte m mit $|m - p\xi| < p\varepsilon$ erstreckt wird, im ganzen Intervall

$$f(\xi) \overset{*}{\sum} \binom{p}{m} u^m (1-u)^{p-m} \leqq f(u) + \sigma + f(\xi) \frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2};$$

denn für $0 \leqq u \leqq \xi - 2\varepsilon$ und $\xi + 2\varepsilon \leqq u \leqq 1$ ist $\overset{*}{\Sigma} \leqq u(1-u) : p\varepsilon^2$, und für $\xi - 2\varepsilon \leqq u \leqq \xi + 2\varepsilon$ ist $\overset{*}{\Sigma} \leqq 1$ und $f(\xi) \leqq f(u) + \sigma$. Aus dieser Relation erhalten wir durch die Operation M

$$f(\xi)\,[\varphi_p(\xi + \varepsilon) - \psi_p(\xi - \varepsilon)] \leqq Mf + \sigma\mu_0 + f(\xi) \frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2},$$

also für $p \to \infty$

$$f(\xi)\,[\varphi(\xi + \varepsilon) - \psi(\xi - \varepsilon)] \leqq Mf + \sigma\mu_0$$

und also, wenn $\varphi(u)$ an der Stelle ξ den Sprung

$$\delta = \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0) = \varphi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$$

macht:

$$f(\xi)\,\delta \leqq Mf$$

für jedes Polynom $f(u) \geqq 0$. Insbesondere für $f(u) = u^m(1-u)^n$:

$$\delta \xi^m (1-\xi)^n \leqq \mu_{m,n}, \tag{50}$$

und dies besagt, daß die Folge

$$\mu_n - \delta \xi^n$$

total monoton ist. Ihr entspricht an Stelle von $\varphi_p(u)$ die monotone Funktion

$$\varphi_p(u) - \delta \sum_{m < pu} \binom{p}{m} \xi^m (1-\xi)^{p-m}.$$

Die mit δ multiplizierte Summe konvergiert für $p \to \infty$, wie wir bereits wissen, nach $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ für $u \lessgtr \xi$; überdies aber konvergiert sie nach $\frac{1}{2}$ für $u = \xi$, denn die Wahrscheinlichkeit, daß bei p Versuchen die relative Häufigkeit

nes Ereignisses, von der Wahrscheinlichkeit ξ, unter oder über ξ liege, nvergiert nach

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$$

asselbe gilt von der Summe $\sum_{m\leqq pu}$ statt $\sum_{m<pu}$). An Stelle von $\varphi(u)$, $\psi(u)$ eten also die monotonen Funktionen

$$\varphi(u), \quad \varphi(\xi)-\tfrac{1}{2}\delta, \quad \varphi(u)-\delta,$$
$$\psi(u), \quad \psi(\xi)-\tfrac{1}{2}\delta, \quad \psi(u)-\delta$$

r $u<\xi$, $u=\xi$, $u>\xi$. Diese aber sind an der Stelle ξ stetig, da der ke Grenzwert $\varphi(\xi-0)$ mit dem rechten $\varphi(\xi+0)-\delta$ übereinstimmt, d sind also auch an dieser Stelle gleich; demnach $\varphi(\xi)=\psi(\xi)$; zuleich erkennt man, daß

$$\varphi(\xi)=\tfrac{1}{2}\varphi(\xi-0)+\tfrac{1}{2}\varphi(\xi+0).$$

so: die Gleichungen (49) gelten für $0\leqq u\leqq 1$, und für $0<u<1$ ist

1) $$\varphi(u)=\psi(u)=\tfrac{1}{2}\varphi(u-0)+\tfrac{1}{2}\varphi(u+0).$$

nun die (monotonen, also im Riemannschen Sinne) integrablen Funknen $\varphi_p(u)$ *gleichmäßig beschränkt* sind $(0\leqq\varphi_p(u)\leqq\mu_0)$ und nach r integrablen Funktion $\varphi(u)$ konvergieren, so konvergiert bekanntlich

$\varphi_p(u)\,du$ nach $\int_0^1\varphi(u)\,du$, ferner

$$\int_0^1\varphi_p(u)\,u^{k-1}\,du\to\int_0^1\varphi(u)\,u^{k-1}\,du \qquad (k=1,2,\ldots)$$

d wegen

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi(u)=\varphi(1)-k\int_0^1\varphi(u)\,u^{k-1}\,du$$

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi_p(u)\to\int_0^1 u^k\,d\varphi(u) \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

e linke Seite ist leicht zu ermitteln: die streckenweise konstante nktion $\varphi_p(u)$ macht an den Stellen $\frac{m}{p}$ die Sprünge $\binom{p}{m}\mu_{m,p-m}$ $=0,1,\ldots,p-1$) und es ist

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi_p(u)=\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p}{m}\left(\frac{m}{p}\right)^k\mu_{m,p-m}=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\left(\frac{m}{p}\right)^k\mu_{m,p-m}-\mu_{p,0}.$$

Hier konvergiert der Minuend nach μ_k; denn es ist

$$\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\binom{m}{k}\mu_{m,p-m}=\sum_{m=k}^{p}\binom{p}{k}\binom{p-k}{m-k}\mu_{m,p-m}$$

$$=\binom{p}{k}\sum_{m=0}^{p-k}\binom{p-k}{m}\mu_{k+m,p-k-m}=\binom{p}{k}\mu_k,$$

$$\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{p^k}\mu_{m,p-m}\to\mu_k,$$

woraus die Behauptung der Reihe nach für $k=0,1,2,\dots$ folgt. Also ist

$$\int_0^1 u^k\,d\varphi(u)=\mu_k-\lim\mu_{p,0}=\mu_k-[\psi(1)-\varphi(1)]$$

und definiert man daher die Funktion $\chi(u)$ durch

$$(52)\qquad \begin{cases}\chi(u)=\varphi(u) & \text{für } 0\leqq u<1,\quad \chi(1)=\psi(1) \text{ oder}\\ \chi(0)=\varphi(0), & \chi(u)=\psi(u) \text{ für } 0<u\leqq 1,\end{cases}$$

so ist $\int_0^1 u^k\,d\chi(u)=\mu_k$, $\chi(u)$ eine Lösung des Momentproblems. Nun ist noch umgekehrt die Einzigkeit der Lösung zu zeigen. Setzen wir dazu $\mu_n=\int_0^1 u^n\,d\chi(u)$ voraus, so folgt aus der ersten Gleichung (46)

$$\psi_p(\xi)=\Big(\int_0^{\xi+\varepsilon}+\int_{\xi+\varepsilon}^{1}\Big)\sum_{m\leqq p\xi}\binom{p}{m}u^m(1-u)^{p-m}\,d\chi(u)$$

$$\leqq\int_0^{\xi+\varepsilon}d\chi(u)+\int_{\xi+\varepsilon}^{1}\frac{u(1-u)}{p\varepsilon^2}\,d\chi(u)\leqq\chi(\xi+\varepsilon)+\frac{\mu_{11}}{p\varepsilon^2}$$

($\chi(0)=0$ angenommen) und daraus für $p\to\infty$, sodann $\varepsilon\to 0$

$$\psi(\xi)\leqq\chi(\xi+0);$$

ebenso aus der zweiten Gleichung (46)

Also
$$\varphi(\eta)\geqq\chi(\eta-0).$$

$$\chi(u-0)\leqq\varphi(u)\leqq\psi(u)\leqq\chi(u+0)$$

und hieraus wie früher

$$\chi(u-0)=\varphi(u-0)=\psi(u-0),\quad \chi(u+0)=\varphi(u+0)=\psi(u+0),$$

wegen (51) auf Grund der Forderung des arithmetischen Mittels also $\chi(u)=\varphi(u)=\psi(u)$ für $0<u<1$, während $\chi(0)=0=\varphi(0)$ und $\chi(1)=\mu_0=\psi(1)$ ist; $\chi(u)$ ist mit der oben gefundenen Lösung (52)

ntisch. Also: *das zu einer total monotonen Folge* (oder C-Folge) *örige Momentproblem hat, durch* $\chi(0)=0$ *und die Bedingung des thmetischen Mittels präzisiert, eine und nur eine Lösung, nämlich*

$$\chi(0)=0, \quad \chi(1)=\mu_0,$$

$$\chi(u)=\lim_p \sum_{m<pu} \binom{p}{m} \mu_{m.p-m} = \lim_p \sum_{m\leqq pu} \binom{p}{m} \mu_{m.p-m}$$

$0<u<1$.

Etwas allgemeiner ist

$$\chi(u)=\lim \varphi_p(u_p) \qquad (0<u<1),$$

nn u_p derart nach u konvergiert, daß $\sqrt{p}(u_p-u)\to 0$; ferner gilt

$$\chi(u+0)-\chi(u-0)=\sqrt{2\pi u(1-u)}\lim \sqrt{p}\binom{p}{m}\mu_{m.p-m} \qquad (0<u<1),$$

nn m mit p so nach ∞ divergiert, daß $\sqrt{p}\left(\frac{m}{p}-u\right)\to 0$. Den Beweis eser Behauptungen, mit Benutzung der Stirlingschen Formel, wollen r dem Leser überlassen.

(Eingegangen am 11. Februar 1920.)

Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs.

Von

Rudolf Bach in Essen.

I. Einleitung.

In den folgenden Entwicklungen sollen einmal zum praktischen Gebrauch bei Rechnungen mit dem Krümmungstensor die nötigen Formeln und Lehrsätze zusammengestellt werden, wobei sich einige kleine formale Änderungen und eine Erweiterung der Symbolik als zweckmäßig erweisen. Ferner wird eine neue Differentialeigenschaft des Krümmungstensors aufgedeckt, aus der die Gleichung, die in der Einsteinschen Theorie zum Impuls-Energiesatz führt, durch den Prozeß der Verjüngung folgt. Durch Ausführung der partiellen Integration in kovarianter Form wird erreicht, daß aus den Formeln die Pseudotensoren verschwinden, die nur bei linearen Transformationen kovariant sind. Mit diesen Hilfsmitteln werden die Feldgleichungen der Weylschen Theorie der Gravitation und Elektrizität aufgestellt. Ferner wird gezeigt, daß die Weylsche Wirkungsdichte nur von zwei universellen Konstantenverhältnissen abhängt, indem die Variation des Weltintegrals einer gewissen Kombination der an sich möglichen vier Wirkungsdichten vermöge der vorher aufgestellten Eigenschaften des Krümmungstensors identisch verschwindet. Schließlich wird ein spezielles, ausgezeichnetes Wirkungsprinzip näher verfolgt und auf den kugelsymmetrischen Fall angewendet, wobei sich zeigt, daß die bisher bekannten Resultate der Einsteinschen Theorie in den allgemeinen Formeln enthalten sind. Je nach der Wahl der Integrationskonstanten und des Maßstabes erhält man das Schwarzschildsche Feld für den leeren Raum außerhalb eines Massenpunktes oder für den mit inkompressibler Flüssigkeit angefüllten Raum innerhalb einer Kugel; doch enthält die Lösung noch weit allgemeinere, sehr sonderbare Felder, deren physikalische Bedeutung einstweilen noch völlig dunkel ist.

II. Die Fundamentaltensoren.

Ein Weltpunkt, ein Element des vierdimensionalen Raum-Zeit-ontinuums, wird charakterisiert durch ein Wertsystem der Koordinaten $^{\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Die Differentiale dx^{α} bilden einen kontravarianten ierervektor. In bekannter Weise[1]) werden im Weltpunkt kovariante, ontravariante und gemischte Tensoren verschiedener Stufen definiert und it oberen und unteren Indizes bezeichnet. In jedem Weltpunkt existieren wei Fundamentaltensoren f_{α} und $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,\ g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$, von enen der erste in bewußter Willkür[2]) mit dem Vektor des elektromagne-schen Viererpotentials identifiziert und der zweite zur Einführung einer laßbestimmung verwendet wird. Da durch die Versuchsergebnisse, die ur Aufstellung der speziellen Relativitätstheorie führten, nur über die erhältnisse der $g_{\alpha\beta}$, nicht über diese Größen selbst etwas ausgesagt wird, t zur Erzielung eines Zusammenhanges der Maßbestimmungen in ver-hiedenen Weltpunkten ein besonderes Prinzip erforderlich. Als solches rinzip nimmt nun aber Weyl nicht etwa, wie man erwarten sollte, den alen Vorgang der Bewegung eines starren Maßstabes oder einer Einheits-hr, sondern einen „mathematisch-idealen Prozeß (Parallelverschiebung ines Vektors), der damit nichts zu schaffen hat“[3]). Dieser Prozeß soll ier ohne weitere Kritik übernommen werden. Er wird so definiert, daß ei einer infinitesimalen Parallelverschiebung mit den Komponenten dx^{γ} ie Komponenten des Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta}$ sich mit $(1 - f_{\gamma} dx^{\gamma})$ mul-plizieren, so daß der Weylschen Theorie (unter Benutzung eines will-ürlichen Vektors ξ^{α}) folgende Invariante zugrunde liegt:

1) $$g_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}\xi^{\beta} \cdot e^{\int f_{\gamma} dx^{\gamma}}.$$

Um zur Einsteinschen Theorie zurückzukommen, ist $f_{\gamma} = 0$ zu setzen.

Die Determinante der $g_{\alpha\beta}$ heißt g, die durch g dividierte Unter-eterminante von $g_{\alpha\beta}$ heißt $g^{\alpha\beta}$. Die Quadratwurzel aus der (negativen) eterminante kann betrachtet werden als ein kovarianter antisymmetrischer ensor 4. Stufe, dessen 24 Komponenten $= \pm\sqrt{-g}$ sind, je nachdem ihre ier Indizes eine gerade oder eine ungerade Permutation von 0123 sind.

---

[1]) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys.,) (1916), S. 769; — H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. Phys., **59** (1919), S. 101.

[2]) Z. B. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr., 2 (1918), S. 384, sbes. S. 399, Zeile 5/6.

[3]) H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, Sitzungsberichte der preuß. Akademie Wissenschaften, 30. Mai 1918, bes. S. 480, Zeile 4–8.

III. Die aus den Fundamentaltensoren durch einmalige Differentiation abgeleiteten Größen.

Wir werden die Differentiation nach einer Koordinate kurz durch eine symbolische, mit *horizontalem* Bruchstrich bezeichnete Division durch den Index dieser Koordinate bezeichnen. Verwechslungen sind ausgeschlossen, wenn der unter dem Bruchstrich stehende Buchstabe unzweideutig als Index, nicht als Größe, charakterisiert ist. Wir schreiben also z. B.

$$\frac{g_{ik}}{l} \quad \text{statt} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}. \tag{2}$$

Mit Benutzung dieser Abkürzung schreiben sich die aus den Fundamentaltensoren abgeleiteten Größen folgendermaßen:

$$f_{ik} \equiv \frac{f_i}{k} - \frac{f_k}{i}, \tag{3}$$

ein eindeutig bestimmter antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, ferner

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{g_{kl}}{i} - \frac{g_{ik}}{l} - \frac{g_{il}}{k} + f_i g_{kl} - f_k g_{il} - f_l g_{ik} \right) \text{[4]}, \tag{4}$$

ein Pseudotensor 3. Stufe vom „Gewicht 1", d. h., er nimmt bei Parallelverschiebung denselben Faktor wie der Tensor g_{ik} in der ersten Potenz an. Es ist der Grundgedanke der Einsteinschen Theorie der Relativität des Gravitationsfeldes („Äquivalenzprinzip"), daß in einem Weltpunkt durch eine geeignete nichtlineare Lokaltransformation (Einführung eines krummlinigen, beschleunigten Koordinatensystems) erreicht werden kann, daß sämtliche $\Gamma_{i,kl}$ verschwinden, die ja nach Einstein das Gravitationsfeld charakterisieren. [Die 100 *zweiten* Ableitungen der 10 Größen g_{ik} dagegen können nicht durch eine Lokaltransformation zum Verschwinden gebracht werden, vielmehr sind unter ihnen bei der Einsteinschen Annahme 20 Invarianten enthalten, entsprechend den 20 unabhängigen Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors. Bei der Weylschen Theorie, bei der noch eine Multiplikation des Tensors g_{ik} mit einer Skalarfunktion erlaubt ist, bleiben immer noch 10 Invarianten in den Gliedern 2. Ordnung übrig, entsprechend den 10 unabhängigen Komponenten des unten abzuleitenden speziellen Krümmungstensors $S_{pq,ik}$. Bemerkenswert ist, daß man in der Weylschen Theorie durch eine solche Lokaltransformation ausgerechnet die 10 Komponenten des Einsteinschen verjüngten Krümmungstensors R_{ik} zum Verschwinden bringen kann, die nach Einstein proportional

[4]) Das Vorzeichen übereinstimmend mit Einstein, abweichend von Weyl, s. Bemerkung zu Formeln (20) u. (58).

um grano salis) dem Energietensor der Materie gesetzt werden. Vielleicht ließe sich hierauf eine Theorie der Materie gründen.]

Durch gemischte Multiplikation durch g^{ia} leitet man aus $\Gamma_{a,kl}$ den Pseudotensor vom Gewicht Null ab:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk} = g^{ia}\Gamma_{a,kl}.$$

Endlich bildet man noch einen Vektor vom Gewichte Null durch Verjüngung:

$$\Gamma^a_{ia} = -\frac{\log\sqrt{-g}}{i} - 2f_i.$$

Um in der Schreibweise zum Ausdruck zu bringen, daß ein Tensor gewissen Komponentenindizes oder Indexgruppen symmetrisch oder antimmetrisch ist, schlagen wir in Anlehnung an die Bezeichnungsweise der Vektoralgebra vor, im ersten Fall die betreffenden Indizes bzw. Gruppen durch eine runde, im letzten durch eine eckige Klammer zusammenzufassen. Die bisher definierten Größen schreiben wir deshalb ausführlicher so:

$$g_{(ik)};\quad g^{(ik)};\quad f_{[ik]};\quad \Gamma_{i,(kl)};\quad \Gamma^i_{(kl)}.$$

IV. Die aus beliebigen Tensoren durch einmalige Differentiation abgeleiteten Größen.

Durch Differentiation entstehen aus den Komponenten eines Tensors bekanntlich Pseudotensorkomponenten, doch lassen sich aus diesen durch Hinzufügung von Gliedern, die mittels der Γ^i_{kl} gebildet sind, in bekannter Weise Komponenten eines „erweiterten" Tensors bilden. Für die Bezeichnung dieser Komponenten schlagen wir vor, den Index der Koordinate, nach der jeweils differentiiert ist, hinter einem kurzen *schrägen* Bruchstrich anzuhängen. Die Erweiterungen der Tensoren der niedersten Stufen lauten, mittels der gewöhnlichen Differentiation ausgedrückt:

$$\xi_{/i} = \frac{\xi}{i};$$

$$\xi_{i/k} = \frac{\xi_i}{k} + \xi_a\Gamma^a_{ik};\quad \xi^i_{/k} = \frac{\xi^i}{k} - \xi^a\Gamma^i_{ak};$$

$$\xi_{ik/l} = \frac{\xi_{ik}}{l} + \xi_{ak}\Gamma^a_{il} + \xi_{ia}\Gamma^a_{kl};$$

$$\xi^i_{k/l} = \frac{\xi^i_k}{l} - \xi^a_k\Gamma^i_{al} + \xi^i_a\Gamma^a_{kl};$$

$$\xi^{ik}_{/l} = \frac{\xi^{ik}}{l} - \xi^{ak}\Gamma^i_{al} - \xi^{ia}\Gamma^k_{al}.$$

Über die Erweiterung eines Produktes gilt der wichtige Satz:

$$(\xi^{i_1,i_2\ldots}_{k_1,k_2\ldots}\cdot\eta^{l_1,l_2\ldots}_{m_1,m_2\ldots})_{/r} = \xi^{i_1,i_2\ldots}_{k_1,k_2\ldots/r}\cdot\eta^{l_1,l_2\ldots}_{m_1,m_2\ldots} + \xi^{i_1,i_2\ldots}_{k_1,k_2\ldots}\cdot\eta^{l_1,l_2\ldots}_{m_1,m_2\ldots/r},$$

auf den sich die kovariante Ausführung der partiellen Integration gründet.

V. Die Erweiterung der Fundamentaltensoren.

Es ist anzumerken:

$$(11) \qquad g_{ik|_l} = -g_{ik} f_l; \quad g^{ik}_{/l} = +g^{ik} f_l; \quad (\sqrt{g}_{0123})_{/l} = -2\sqrt{g}_{0123} f_l.$$

$$(12) \qquad (\sqrt{g} g^{ik} g^{lm})_{/n} = 0; \quad (g_{ik} g^{lm})_{/n} = 0.$$

$$(13) \qquad (\sqrt{g} g^{ik})_{/l} = -\sqrt{g} g^{ik} f_l; \quad (\sqrt{g} g^{i\alpha})_{/\alpha} = -\sqrt{g} f^i.$$

$$(14) \qquad f_{i/_k} - f_{k/_i} = f_{ik}.$$

In der Einsteinschen Theorie ist die Erweiterung von g_{ik} identisch Null. Das hat nach Formel (10) zur Folge, daß bei praktischer Ausführung kovarianter Erweiterungen Größen wie g_{ik}, g^{ik}, $\sqrt{g}$ als konstante Faktoren behandelt werden können. In der Weylschen Theorie ist dieses vereinfachte Verfahren nur bei den in (12) angegebenen Kombinationen vom Gewichte Null gestattet.

VI. Der Krümmungstensor.

a) Aus dem Pseudotensor Γ^i_{kl} leitet sich der Weylsche Krümmungstensor ab:

$$(15) \qquad F^p_{q,[ik]} \equiv \frac{\Gamma^p_{qi}}{k} - \frac{\Gamma^p_{qx}}{i} + \Gamma^p_{ia}\Gamma^a_{qk} - \Gamma^p_{ka}\Gamma^a_{qi} \; [5]).$$

Dieser Tensor vom Gewichte Null hat die bekannte Symmetrieeigenschaft:

$$(16) \qquad \boxed{F^p_{qik} + F^p_{ikq} + F^p_{kqi} = 0}$$

und genügt dem Differentialgleichungssystem:

$$(17) \qquad \boxed{F^p_{qik|_l} + F^p_{qkl|_i} + F^p_{qli|_k} = 0} \qquad (p, q, i, k, l = 0, 1, 2, 3).$$

b) Da die Relation (17) neu zu sein scheint, möge ein Beweis hier Platz finden. Das erste Glied der linken Seite lautet:

$$\frac{F^p_{qik}}{l} - F^a_{qik}\Gamma^p_{al} + F^p_{aik}\Gamma^a_{ql} + F^p_{q[ak]}\Gamma^a_{(il)} + F^p_{q[ia]}\Gamma^a_{(kl)}.$$

Führt man hier im 5. Glied eine zyklische Vertauschung von ikl aus, wie sie in (17) verlangt wird, so wird aus ihm

$$+ F^p_{q[ka]}\Gamma^a_{(li)} \quad \text{oder} \quad - F^p_{q[ak]}\Gamma^a_{il},$$

woraus ersichtlich ist, daß es sich gegen das 4. Glied weghebt. Nunmehr lautet mit Einsetzung von (15) unsere Relation:

[5]) Wegen des Vorzeichens von Γ^i_{kl} s. Bemerkung zu Formeln (4), (20), (58).

$$0 = \frac{\Gamma^p_{qi}}{kl} - \frac{\Gamma^p_{qx}}{il} + \frac{\Gamma^p_{ia}}{l}\Gamma^a_{qk} + \Gamma^p_{ia}\frac{\Gamma^a_{qk}}{l} - \frac{\Gamma^p_{ka}}{l}\Gamma^a_{qi} - \Gamma^p_{ka}\frac{\Gamma^a_{qi}}{l}$$

$$- F^a_{qik}\Gamma^p_{al} + F^p_{aik}\Gamma^a_{ql} + 2 \cdot 8 \text{ analoge Glieder},$$

sich aus den angeschriebenen durch zyklische Vertauschung von ikl geben. Führt man diese Vertauschung im 2., 3. und 6. Glied einmal, 1., 4. und 5. zweimal aus, so daß der Index l an bevorzugter Stelle cheint, so sieht man, daß sich die beiden ersten Glieder wegheben und übrigen folgendermaßen zusammenfassen lassen:

$$\Gamma^a_{il}\left(F^p_{aik} - \frac{\Gamma^p_{ai}}{k} + \frac{\Gamma^p_{ak}}{i}\right) - \Gamma^p_{\beta l}\left(F^\beta_{qik} - \frac{\Gamma^\beta_{qi}}{k} - \frac{\Gamma^\beta_{qk}}{i}\right) + 2 \cdot 2 \text{ analoge Glieder}.$$

rch nochmalige Anwendung von (15) bringt man die Ableitungen der zum Verschwinden, und es bleiben nur noch Produkte der Γ selbst je dreien:

$$\Gamma^a_{ql}(\Gamma^p_{i\beta}\Gamma^\beta_{ak} - \Gamma^p_{k\beta}\Gamma^\beta_{ai}) - \Gamma^p_{\beta l}(\Gamma^\beta_{ia}\Gamma^a_{qk} - \Gamma^\beta_{ka}\Gamma^a_{qi}) + 2 \cdot 2 \text{ analoge Glieder}.$$

rch zyklische Vertauschung von ikl kann man hier in den Größen Γ und Γ^a_{qi} als zweiten unteren Index l erhalten, worauf offenbar wird, 3 sich alles weghebt. Q. E. D.

c) **Struktur des Gleichungssystems (17).** Da nur diejenigen Gleichungen des Systems, in den ikl voneinander verschieden sind, etwas er den Inhalt von (16) Hinausgehendes sagen, führen wir zur Abkürzung tt der *drei* unteren Indizes ikl zur Kennzeichnung einer einzelnen dieser eichungen einen *einzigen* symbolischen oberen Index m ein, der mit ikl sammen eine gerade Permutation von 0123 bildet. Bei der Prüfung r gegenseitigen Abhängigkeit der Gleichungen (17) wollen wir uns auf n Einsteinschen Fall beschränken, wo die $f_a = 0$ sind und der durch runterziehen des oberen Index aus F^p_{qik} entstehende Tensor $R_{([pq][ik])}$ durch die Klammern angedeuteten Symmetrieeigenschaften hat. Wir zeichnen also z. B. die Gleichung

$$R_{ik,01/2} + R_{ik,12/0} + R_{ik,20/1} = 0$$

nbolisch mit R^3_{ik}, ausführlicher $R^3_{[ik]}$. Dann sieht man, daß das System $_{k]}$ zunächst $4 \cdot 6 = 24$ Differentialgleichungen für die 20 unabhängigen ümmungskomponenten enthält. Doch bestehen zwischen den 24 Gleichungen 10 Relationen, nämlich

7a) $$R^a_{ia} \equiv 0 \text{ (4 Relationen)},$$

7b) $$R^a_{ik|a} \equiv 0 \text{ (6 Relationen)}.$$

Die letztere Gleichung lautet mit Benutzung einer in Nr. VII zu erklärenden Bezeichnung:

$$(17\,b') \quad R_{ik,12/[30]} + R_{ik,13/[02]} + R_{ik,10/[23]} + R_{ik,23/[10]} + R_{ik,02/[13]} + R_{ik,30/[12]} =$$

oder auch

$$(17\,b'') \quad \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{ik,\alpha\beta/\gamma\delta} = 0.$$

Versucht man nun, durch Elimination einzelner Krümmungskomponenten aus einigen Gleichungen (17) weitere Gleichungen zu finden, so ergibt sich immer wieder nur eine Kombination anderer Gleichungen des Systems (17), das somit vollständig ist.

Es können also, da zwischen den 24 Gleichungen für 20 Unbekannte 10 Relationen bestehen, anscheinend 6 Unbekannte willkürlich gewählt werden. Als solche 6 Unbekannte darf man aber nicht 6 beliebige, z. B. nicht die sich zunächst aufdrängenden $R_{ik,\,ik}$ wählen. Man muß vielmehr eine Koordinatenrichtung bevorzugen. [Es tritt diese Notwendigkeit auch an anderen Stellen der Krümmungstheorie gerade des vierdimensionalen Kontinuums hervor. Sie ist besonders deshalb merkwürdig, weil auch in Wirklichkeit eine Koordinate den drei anderen gegenüber ausgezeichnet ist.] Da man bei Rechnungen dieser Art nie sicher sein kann, ob die Abzählung der willkürlichen Unbekannten stimmt, werde unter Bevorzugung der Koordinate x^0 die Auflösung der Gleichungen (17) im einzelnen verfolgt.

1. Man wähle willkürlich die drei Größen

$$R_{01,\,02}, \quad R_{02,\,03}, \quad R_{03,\,01}$$

und die dazu dualen

$$R_{23,\,31}, \quad R_{31,\,12}, \quad R_{12,\,23}.$$

2. Man bestimme die drei Größen

$$R_{01,\,23}, \quad R_{02,\,31}, \quad R_{03,\,12},$$

deren Summe Null ist, bzw. aus den drei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$R^1_{01}, \quad R^2_{02}, \quad R^3_{03},$$

in denen je das erste Glied den Differentialquotienten der zu bestimmenden Komponente nach x^0 enthält und die 2 übrigen Glieder bekannt sind. Wegen der Relation (17a) sind die drei Gleichungen mit der den 3 Unbekannten auferlegten Nebenbedingung verträglich.

3. Man bestimme die 6 Unbekannten von der Form $R_{0i,\,ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ bzw. aus den Gleichungen R^k_{ik}, die außer je einer dieser 6 Unbekannten

bereits bekannte Größen enthalten. (Hier ist natürlich über k nicht summieren!)

4. Endlich hat man zur Bestimmung der 6 Hauptkomponenten $R_{ik,\,ik}$ $k = 0, 1, 2, 3$) je zwei Gleichungen, nämlich, wenn $iklm$ eine gerade mutation von 0 1 2 3 ist, die Gleichungen R^{l}_{ik} und R^{m}_{ik}.

VII. Das Symmetriegesetz der zweiten Erweiterung.

Die Komponenten der Erweiterung der Erweiterung eines Tensors eichnen wir in konsequenter Weiterbildung der in **IV.** eingeführten nbolik, indem wir hinter einen schrägen Bruchstrich in der richtigen henfolge die Indizes der beiden Koordinaten setzen, nach denen bei der eugung der betreffenden Komponente nacheinander differentiiert worden Diese beiden Indizes sind nicht miteinander vertauschbar, doch unter- eidet sich der durch eine solche Vertauschung entstehende Tensor von n vorher vorhandenen nur durch eine lineare Kombination der Kompo- ten des ursprünglichen (nicht erweiterten) Tensors, deren Koeffizienten immungskomponenten sind. Für den Fall der Erweiterung eines ein- nen kovarianten Vierervektors ist diese Tatsache schon von Einstein seiner eingangs zitierten Arbeit zur Herleitung des Krümmungstensors utzt worden. Die betreffenden Formeln lauten unter Einführung des en Symbols $\ldots_{/[ik]}$ in den niedersten Fällen:

$$\xi_{/[ik]} \equiv \xi_{/ik} - \xi_{/ki} = 0.$$

$$\xi_{r/[ik]} = \xi_{\alpha} F^{\alpha}_{r,ik};\quad \xi^{r}_{/[ik]} = -\xi^{\alpha} F^{r}_{\alpha,ik}.$$

$$\xi_{rs/[ik]} = \xi_{\alpha s} F^{\alpha}_{r,ik} + \xi_{r\alpha} F^{\alpha}_{s,ik},$$

$$\xi^{r}_{s/[ik]} = -\xi^{\alpha}_{s} F^{r}_{\alpha,ik} + \xi^{r}_{\alpha} F^{\alpha}_{s,ik},$$

$$\xi^{rs}_{/[ik]} = -\xi^{\alpha s} F^{r}_{\alpha,ik} - \xi^{r\alpha} F^{s}_{\alpha,ik}.$$

rch Vergleich mit den Formeln (7), (8), (9) wird die Umkehrung des ylschen Vorzeichens von $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ gerechtfertigt. Kovarianten Indizes ent- icht jetzt in beiden Formelgruppen rechts das positive Vorzeichen. Für praktischen Gebrauch seien noch angemerkt:

$$(\sqrt{g}\xi_r)_{/[ik]} = -2\sqrt{g}\xi_r f_{ik} + \sqrt{g}\xi_{\alpha} F^{\alpha}_{r,ik}.$$

$$(\sqrt{g} f^{[\alpha\beta]})^{\cdot}_{/\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{g} f^{[\alpha\beta]})_{/[\alpha\beta]} = 0.$$

$$(\sqrt{g} g^{i\alpha})_{/[\alpha k]} = -\sqrt{g} g^{i\alpha} f_{\alpha k}.$$

VIII. Die aus dem Krümmungstensor linear gebildeten Tensoren.

1. Durch Herunterziehen des oberen Index bilden wir aus $F^{p}_{q.ik}$ den rein kovarianten Tensor vom Gewichte 1:

$$F_{pq.ik} = g_{p\alpha} F^{\alpha}_{q.ik}.$$

Wir schreiben diese Formel aus dem Grunde an, weil gezeigt werden muß, an welche Stelle der unteren Indexgruppe der heruntergezogene Index gesetzt wird. $F_{pq.ik}$ unterscheidet sich von dem Riemannschen Tensor $R_{pq.ik}$ durch additive Glieder, die aus f_α gebildet sind. Die Beziehung ist folgende:

$$(24)\quad F_{pq.[ik]} = R_{([pq].[ik])} + \tfrac{1}{2}(g_{pq} f_{k|i} + g_{pk} f_{q|i} + g_{qi} f_{p|k}) - \tfrac{1}{2}(g_{pq} f_{i|k} + g_{pi} f_{q|k} + g_{$$
$$+ \tfrac{1}{4}(g_{pk} f_q f_i + g_{qi} f_p f_k + g_{pi} g_{qk} f_\alpha f^\alpha) - \tfrac{1}{4}(g_{pi} f_q f_k + g_{qk} f_p f_i + g_{pk} g_{qi}$$

Er besitzt nicht die hohe Symmetrie des Riemannschen, sondern erleidet bei Indexvertauschungen folgende Änderungen:

$$(25)\qquad F_{qp.ik} = -F_{pq.ik} - g_{pq} f_{ik}.$$

$$(26)\quad F_{ik.pq} = F_{pq.ik} + \tfrac{1}{2}(g_{ik} f_{qp} + g_{qp} f_{ik} + g_{pi} f_{qk} + g_{qk} f_{pi} + g_{iq} f_{kp} + g_{kp} f_{iq}).$$

Man kann aber aus seinen Komponenten einen Tensor $S_{pq.ik}$ bilden, der dieselbe Symmetrie besitzt wie der Riemannsche:

$$(27)\qquad S_{([pq].[ik])} \equiv \tfrac{1}{4}\left((F_{pq.ik} - F_{qp.ik}) + (F_{ik.pq} - F_{ki.pq})\right).$$

Mit ihm hängt $F_{pq.ik}$ zusammen durch die oft benutzte Beziehung:

$$(28)\quad F_{pq.ik} = S_{pq.ik} + \tfrac{1}{2} g_{pq} f_{ki} + \tfrac{1}{4}(g_{pk} f_{qi} - g_{pi} f_{qk} - g_{qk} f_{pi} + g_{qi} f_{pk}).$$

2. Durch Verjüngung bildet man den symmetrischen Tensor 2. Stufe vom Gewicht Null:

$$(29)\qquad S_{(ik)} \equiv g^{\alpha\beta} S_{i\alpha.\beta k}.$$

Hieraus folgt mittels (28) sofort:

$$(30)\quad \begin{cases} g^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta.ik} = -2 f_{ik}; & g^{\alpha\beta} F_{\alpha i.\beta k} = -f_{ik} - S_{ik}; & g^{\alpha\beta} F_{\alpha i.k\beta} = +f_{ik} + S_{i} \\ g^{\alpha\beta} F_{i\alpha.\beta k} = S_{ik}; & g^{\alpha\beta} F_{i\alpha.k\beta} = -S_{ik}; & g^{\alpha\beta} F_{ik.\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Mit dem entsprechenden Einsteinschen Tensor $R_{(ik)}$ hängt S_{ik} so zusammen:

$$(31)\quad \begin{cases} S_{ik} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha.\beta k} + \tfrac{1}{2}(g_{ik} g^{\alpha\beta} f_{\alpha|\beta} - g_{ik} f_\alpha f^\alpha + f_{i|k} + f_{k|i} + f_i f_k), \text{ oder} \\ S_{ik} = R_{ik} + \dfrac{1}{2}\left(g_{ik} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial(\sqrt{g} f^\alpha)}{\partial x^\alpha} + f_{i|k} + f_{k|i} + f_i f_k\right). \end{cases}$$

3. Durch nochmalige Verjüngung bildet man den Skalar vom Gewichte -1:

$$(32)\qquad S \equiv g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha.\beta\delta} + \frac{3}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} f^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{3}{2} f_\alpha f^\alpha.$$

4. Außer dem Tensor $S_{pq,ik}$ besitzen noch die Tensoren

$$S_{pi}g_{qk} - S_{pk}g_{qi} - S_{qi}g_{pk} + S_{qk}g_{pi}$$

nd

$$S\cdot(g_{pk}g_{qi} - g_{pi}g_{qk})$$

ie Symmetrieeigenschaften des Riemannschen. Aus diesen drei Tensoren ißt sich nun[6]) ein von den f_α völlig unabhängiger Tensor bilden:

33) $$\bar{S}_{pq,ik} \equiv S_{pq,ik} + \tfrac{1}{2}\cdot(S_{pi}g_{qk} - S_{pk}g_{qi} - S_{qi}g_{pk} + S_{qk}g_{pi}) + \tfrac{1}{6}S\cdot(g_{pk}g_{qi} - g_{pi}g_{qk}).$$

m n-dimensionalen Kontinuum treten an Stelle der Nenner 2 und 6 ie Zahlen $(n-2)$ und $(n-1)(n-2)$. In Räumen von weniger als Dimensionen ist $\bar{S}_{pq,ik} \equiv 0$. Der zu $\bar{S}_{pq,ik}$ gehörige verjüngte Tensor $_{qi}$ ist identisch Null, ebenso natürlich sein Skalar $\bar{S}$. Eine weitere Eigenchaft von $\bar{S}_{pq,ik}$ wird sich in Nr. **IX.** ergeben, wo die quadratischen Tenoren betrachtet werden (s. Formel (40)).

5. Es bleibt noch die Einwirkung der Differentialrelation (17) auf ie verjüngten Tensoren zu betrachten. Nun folgt aus (17) durch Multiplikation mit dem Tensor

$$\delta^l_p \sqrt{g}\, g^{qi} g^{k\tau},$$

essen Erweiterung verschwindet, zunächst mittels (10):

$$(\sqrt{g}\, g^{qi}g^{k\varepsilon}g^{\alpha\beta}F_{\beta q,ik})_{/\alpha} + (\sqrt{g}\, g^{qi}g^{k\varepsilon}g^{\alpha\beta}F_{\beta q,k\alpha})_{/i} + (\sqrt{g}\, g^{qi}g^{k\varepsilon}g^{\alpha\beta}F_{\beta q,\alpha i})_{/k} = 0,$$

nd hieraus mittels (30):

34) $$2\cdot(\sqrt{g}\, S^{\varepsilon\alpha})_{/\alpha} = (\sqrt{g}\, S g^{\varepsilon\alpha})_{/\alpha} + (\sqrt{g}\, f^{\varepsilon\alpha})_{/\alpha},$$

ine Verallgemeinerung der Relation der Einsteinschen Theorie, die dort um Impuls-Energiesatz führt und auch uns zu einer Vereinfachung der ravitationsgleichungen führen wird. Aus (34) folgt durch Divergenzildung:

35) $$2(\sqrt{g}\, S^{\alpha\beta})_{/\alpha\beta} = (\sqrt{g}\, S g^{\alpha\beta})_{/\alpha\beta}.$$

X. Die aus dem Krümmungstensor quadratisch zusammengesetzten Tensoren zweiter Stufe.

1. Wir bilden zunächst den *symmetrischen* Haupttensor zweiter Stufe om Gewichte -1:

36) $$T_{(\varepsilon\zeta)} \equiv S_{\varepsilon\alpha\beta\gamma}S_{\zeta ikl}\cdot g^{\alpha i}g^{\beta k}g^{\gamma l}.$$

[6]) Die Priorität hierfür muß ich Weyl zuerkennen, s. Math. Zeitschr., 2 (1918), . 404.

Durch Permutation der zweiten Indizes der $g^{\cdot\cdot}$ erhält man 6 solche Tensoren, die aber nicht wesentlich verschieden sind, wie folgende Zusammenstellung zeigt, in der oben nur die betreffende Permutation von ikl angegeben ist:

ikl,	kli,	lik,	ilk,	lki,	kil
$+T_{\varepsilon\zeta}$	$-\frac{1}{2}T_{\varepsilon\zeta}$	$-\frac{1}{2}T_{\varepsilon\zeta}$	$-T_{\varepsilon\zeta}$	$+\frac{1}{2}T_{\varepsilon\zeta}$	$+\frac{1}{2}T_{\varepsilon\zeta}$.

Die Summe aller 6 Werte ist Null, ebenso die Summe der drei den geraden Permutationen entsprechenden Werte (vor dem Strich).

Mittels des verjüngten Tensors S_{ik} erhält man den zweiten, ebenfalls *symmetrischen* Tensor:

$$U_{(\varepsilon\zeta)} \equiv S_{\varepsilon\alpha,\beta\zeta} \cdot S^{\alpha\beta} \tag{37}$$

ferner

$$V_{(\varepsilon\zeta)} \equiv S_{\varepsilon\alpha} S_{\zeta\beta} \cdot g^{\alpha\beta} \tag{38}$$

und

$$S \cdot S_{\varepsilon\zeta}. \tag{39}$$

Zwischen diesen 4 Tensoren besteht die Relation (40) (s. u.).

2. Durch Anwendung derselben Operationen auf den *unabhängigen* Tensor $\bar{S}_{pqik}$ erhält man

$$\bar{T}_{\varepsilon\zeta} \equiv \bar{S}_{\varepsilon\alpha\beta\gamma} \bar{S}_{\zeta ikl} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\gamma l}. \tag{36'}$$

Es ist

$$\bar{T}_{\varepsilon\zeta} = T_{\varepsilon\zeta} - 2\,U_{\varepsilon\zeta} - 2\,V_{\varepsilon\zeta} + S S_{\varepsilon\zeta} + g_{\varepsilon\zeta} \cdot (\tfrac{1}{2} S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{6} S S), \tag{36''}$$

wie man leicht nachrechnet.

Ferner ergibt sich sofort:

$$\bar{U}_{\varepsilon\zeta} = \bar{V}_{\varepsilon\zeta} \equiv 0. \tag{37'}$$

Der Tensor $\bar{T}_{\varepsilon\zeta}$ hat aber noch eine sehr wichtige Eigenschaft, er ist nämlich reduziert, d. h. seine Komponenten sind den $g_{\varepsilon\zeta}$ proportional. Den Beweis führen wir durch Anwendung eines speziellen Koordinatensystems, was erlaubt ist, da die zu beweisende Relation eine rein algebraische zwischen den Krümmungskomponenten ist. Kretschmann hat[7]) eine übersichtliche Anordnung der Riemannschen Krümmungskomponenten in einem quadratischen Schema von 6·6 Feldern angegeben, in dem die 6 Zeilen bzw. Kolonnen mit den Indexpaaren 01, 02, 03, 12, 31, 23 numeriert sind. Er gibt an, daß man in jedem Punkte durch eine lineare Transformation der Koordinaten alle 24 in diesem Schema außerhalb der

[7]) Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate usw., Ann. d. Phys., **53** (1917), S. 575 ff.

iden Diagonalen stehenden Komponenten zum Verschwinden bringen nn und daß insbesondere in einem nach Einstein leeren Raume, d. h. einem solchen, wo der verjüngte Tensor R_{ik} verschwindet, die Sache eingerichtet werden kann, daß gleichzeitig der Fundamentaltensor g_{ik} e Form annimmt, die er in der speziellen Relativitätstheorie hat. Gerade ese Voraussetzung trifft nun auf unseren unabhängigen Tensor $\bar{S}_{pq,ik}$ zu, $\bar{S}_{qi} = 0$ ist. Wir denken uns also im betrachteten Weltpunkte das T. imaginäre) Koordinatensystem so gewählt, daß $g_{ik} = 1$ oder 0 ist, nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, und $\bar{S}_{pq,ik}$ die soeben beschriebene ezielle Form hat. Mit Rücksicht auf die Relation $\bar{S}_{qi} = 0$ sieht man icht ein, daß $\bar{S}_{pq,ik}$ im einzelnen so aussieht:

	01	02	03	12	31	23
01	A	0	0	0	0	A
02	0	B	0	0	B	0
03	0	0	Γ	C	0	0
12	0	0	C	Γ	0	0
31	0	B	0	0	B	0
23	A	0	0	0	0	A

$\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma = A + B + C = 0$ ist. Eine Bevorzugung des Index 0 ist r scheinbar vorhanden.

Bildet man nun z. B. die Komponente $\bar{T}_{00} \equiv \sum_{\alpha\beta\gamma} (\bar{S}_{0\alpha\beta\gamma})^2$, so erhält an $\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 + \Gamma^2 + A^2 + B^2 + C^2$, also einen von dem speziellen Index- ar (00) ganz unabhängigen Ausdruck. Ferner sieht man sofort, daß B. $\bar{T}_{01} \equiv \sum_{\alpha\beta\gamma} \bar{S}_{0\alpha\beta\gamma} \bar{S}_{1\alpha\beta\gamma}$ identisch verschwindet. Es ist also tatsächlich $_\zeta$ proportional $g_{\varepsilon\zeta}$. Q. E. D.

Nunmehr kann mittels (36″) die angekündigte Relation zwischen den nsoren $T_{\varepsilon\zeta}$, $U_{\varepsilon\zeta}$, $V_{\varepsilon\zeta}$, $SS_{\varepsilon\zeta}$ unmittelbar angeschrieben werden:

0) $$T_{\varepsilon\zeta} - 2U_{\varepsilon\zeta} - 2V_{\varepsilon\zeta} + SS_{\varepsilon\zeta} \equiv \tfrac{1}{4} g_{\varepsilon\zeta} \cdot (S_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4 S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} + SS).$$

3. (Anschluß an 1.) Eine weitere Reihe von Tensoren ergibt sich s dem Produkt $S_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{ik}$, nämlich erstens ohne Verjüngung eines Faktors *antisymmetrischer* Tensor:

1) $$A_{[\varepsilon\zeta]} \equiv S_{\varepsilon\zeta\alpha\beta} f^{\alpha\beta},$$

rzu durch andere Anordnung der Indizes:

1′) $$\begin{cases} S_{\varepsilon\alpha,\zeta\beta} f^{\alpha\beta} = S_{\alpha\varepsilon,\beta\zeta} f^{\alpha\beta} = +\tfrac{1}{2} A_{\varepsilon\zeta}, \\ S_{\varepsilon\alpha,\beta\zeta} f^{\alpha\beta} = S_{\alpha\varepsilon,\zeta\beta} f^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2} A_{\varepsilon\zeta}. \end{cases}$$

Ferner zeigt sich ein *unsymmetrischer* Tensor:

$$B_{\varepsilon\zeta} \equiv f_{\varepsilon\alpha} S_{\zeta\beta} g^{\alpha\beta}, \tag{42}$$

dessen Skalar $g^{\varepsilon\zeta} B_{\varepsilon\zeta} = 0$ ist, und ein *antisymmetrischer*:

$$S \cdot f_{[\varepsilon\zeta]}. \tag{43}$$

Das Produkt $f_{\alpha\beta} f_{ik}$ liefert noch einen *symmetrischen* Tensor, der ein Bestandteil des „Maxwellschen Spannungstensors“ ist:

$$M_{(\varepsilon\zeta)} \equiv f_{\varepsilon\alpha} f_{\zeta\beta} \cdot g^{\alpha\beta}. \tag{44}$$

Hierzu kommen noch die reduzierten Tensoren, die aus $g_{\varepsilon\zeta}$ durch Multiplikation mit den sogleich zu besprechenden Skalaren hervorgehen:

$$S_0 g_{\varepsilon\zeta},\ S_2 g_{\varepsilon\zeta},\ S_4 g_{\varepsilon\zeta},\ f g_{\varepsilon\zeta}. \tag{45}$$

4. Aus diesen Tensoren (36), (37), (38), (39), (41), (42), (43), (44), (45) lassen sich alle anderen zusammensetzen mit Benutzung der Formel (28), z. B.:

$$\begin{aligned}
F_{\varepsilon\alpha\beta\gamma} S_{\zeta ikl} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\gamma l} &= T_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{3}{4} A_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{1}{2} B_{\varepsilon\zeta}, \\
F_{\varepsilon\zeta\alpha\beta} \cdot f^{\alpha\beta} &= A_{\varepsilon\zeta} - \tfrac{1}{2} f g_{\varepsilon\zeta}, \\
F_{\varepsilon\alpha\beta\gamma} F_{\zeta ikl} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\gamma l} &= T_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{1}{2}(B_{\varepsilon\zeta} + B_{\zeta\varepsilon}) + \tfrac{3}{8} f g_{\varepsilon\zeta}, \\
F_{\alpha\beta\varepsilon\gamma} F_{ik\zeta l} g^{\alpha k} g^{\beta i} g^{\gamma l} &= -\,T_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{1}{2}(B_{\varepsilon\zeta} + B_{\zeta\varepsilon}) - \tfrac{1}{8} f g_{\varepsilon\zeta} + M_{\varepsilon\zeta}.
\end{aligned}$$

X. Die aus dem Krümmungstensor quadratisch zusammengesetzten Skalare.

Diese Skalare sind besonders wichtig, da sie, mit $\sqrt{-g}$ multipliziert, als Wirkungsdichte in Minimalprinzipen verwendet werden. Sie seien deshalb ausführlich aufgezählt.

Alle diese Skalare lassen sich, soweit sie ohne Benutzung des verjüngten Tensors S_{ik} gebildet sind, zurückführen auf die beiden folgenden:

$$S_4 \equiv S_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{iklm} g^{\alpha i} g^{\beta k} g^{\gamma l} g^{\delta m} = g^{\varepsilon\zeta} T_{\varepsilon\zeta} \tag{46}$$

und

$$f \equiv f_{\alpha\beta} f_{ik} g^{\alpha i} g^{\beta k} = g^{\varepsilon\zeta} M_{\varepsilon\zeta}. \tag{47}$$

Die 24 Skalare, die aus $F_{pqik} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{p\alpha} g^{q\beta} g^{i\gamma} g^{k\delta}$ durch Permutation der zweiten Indizes der $g^{\cdot\cdot}$ entstehen, haben 8 verschiedene Werte, die im folgenden zusammengestellt sind. Vor dem Strich ist immer der betreffende Wert angegeben, hinter dem Strich die Permutationen von $\alpha\beta\gamma\delta$, bei denen dieser Wert angenommen wird. Die geraden Permutationen sind unterstrichen, die der Vierergruppe doppelt unterstrichen.

48)
$$\left\{\begin{array}{l|l}
+\ S_4+\frac{3}{2}f & \underline{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}}. \\
-\ S_4-\frac{3}{2}f & \alpha\beta\delta\gamma. \\
+\frac{1}{2}S_4+\frac{3}{4}f & \alpha\gamma\beta\delta,\ \alpha\delta\gamma\beta. \\
-\frac{1}{2}S_4-\frac{3}{4}f & \underline{\alpha\gamma\delta\beta},\ \underline{\alpha\delta\beta\gamma}. \\
+\ S_4-\frac{1}{2}f & \underline{\underline{\gamma\delta\alpha\beta}},\ \underline{\underline{\delta\gamma\beta\alpha}},\ \underline{\underline{\beta\alpha\delta\gamma}}. \\
-\ S_4+\frac{1}{2}f & \beta\alpha\gamma\delta,\ \gamma\delta\beta\alpha,\ \delta\gamma\alpha\beta. \\
+\frac{1}{2}S_4-\frac{1}{4}f & \beta\gamma\delta\alpha,\ \gamma\beta\alpha\delta,\ \delta\alpha\beta\gamma,\ \beta\delta\alpha\gamma,\ \gamma\alpha\delta\beta,\ \delta\beta\gamma\alpha. \\
-\frac{1}{2}S_4+\frac{1}{4}f & \underline{\beta\gamma\alpha\delta},\ \underline{\gamma\beta\delta\alpha},\ \underline{\delta\alpha\gamma\beta},\ \underline{\beta\delta\gamma\alpha},\ \underline{\gamma\alpha\beta\delta},\ \underline{\delta\beta\alpha\gamma}.
\end{array}\right.$$

Die Summe aller 24 Werte ist Null.

Die Summe der 12 den geraden Permutationen entsprechenden Werte
st Null.

Die Summe der 4 den Permutationen der Vierergruppe entsprechen-
en Werte ist $4S_4$

Zu S_4 und f treten noch die aus S_{ik} gebildeten Skalare

49) $$S_2 \equiv S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$

nd

50) $$S_0 \equiv SS.$$

Das „Hamiltonsche Prinzip“ hat also, wenn man noch das vier-
imensionale Integrationselement

51) $$dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^0 \equiv dx^{1230}$$

etzt, folgende Form:

52) $$\delta\int\sqrt{g}\,(cf + c_0S_0 + c_2S_2 + c_4S_4)\,dx^{1230} = 0,$$

nthält also vorläufig drei universelle Konstantenverhältnisse (s. u. Formel 66).

XI. Die Variation des Feldes.

Wir erteilen bei festgehaltenem Koordinatensystem den beiden Fun-
amentaltensoren unendlich kleine Zuwüchse, die am Rande des späteren
ntegrationsgebietes verschwinden:

53) $$\delta f_i \equiv h_i, \quad \delta g_{ik} \equiv k_{ik}.$$

54) $$k \equiv g^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}, \quad k^{ik} \equiv g^{i\alpha}g^{k\beta}k_{\alpha\beta}, \quad k^i_k \equiv g^{i\alpha}k_{\alpha k}$$

nd der Skalar und die kontravarianten bzw. gemischten Komponenten
es Tensors k_{ik}. Die Variation des kontravarianten Fundamentaltensors
nd der $\sqrt{g}$ ergibt sich leicht zu

55) $$\delta g^{ik} = -\,k^{ik}; \quad \delta\sqrt{g} = \tfrac{1}{2}k\sqrt{g}.$$

Ferner aber wird:

$$(56)\quad \delta\Gamma^r_{ik} \equiv \Delta^r_{(ik)} = \tfrac{1}{2}\left[(g^{ra}k_{ik})_{/a} - k^r_{i/k} - k^r_{k/i} + g_{ik}h^r - \delta^r_i h_k - \delta^r_k h_i\right].$$

Hierbei stellt sich also heraus, daß die *Variation des Pseudotensors Γ^i_{kl} ein Tensor ist*[8]). (Dagegen ist die Variation von $\Gamma_{r,ik}$ ein Pseudotensor). Dieser Tensor hat die Eigenschaft:

$$(57)\quad \Delta^a_{ia} = -\tfrac{1}{2}k_{/i} - 2h_i.$$

Drückt man nun die Variation des Krümmungstensors durch diesen Tensor aus, so erlebt man überraschende Vereinfachungen, es bleibt:

$$(58)\quad \delta F^p_{qik} = \Delta^p_{qi/k} - \Delta^p_{qk/i}.$$

Hier zeigt sich wieder die Zweckmäßigkeit der Umkehrung des Vorzeichens der $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$. (Die Formeln für die Variation der *rein kovarianten* Komponenten des Tensors F^p_{qik} oder für die der Tensoren $S_{pq,ik}$ oder S_{qi} sind wesentlich komplizierter. Wir werden daher bei der Ausführung der Variation immer erst die Komponenten F^p_{qik} herstellen.) Endlich ist

$$(59)\quad \delta f_{ik} = h_{i/k} - h_{k/i}.$$

XII. (Einschaltung.) Das Weltintegral über die antisymmetrischen Tensoren zweiten Grades vierter Stufe.

Bevor wir zur Variation von (52) schreiten, möchten wir auf die beiden Integrale hinweisen:

$$(60)\quad \int \mathfrak{B}_1\, dx^{1230}, \quad \text{wo } \mathfrak{B}_1 = f_{12}f_{30} + f_{13}f_{02} + f_{10}f_{23},$$

und

$$(61)\quad \int \mathfrak{B}_2\, dx^{1230}, \quad \text{wo } \mathfrak{B}_2 = F^a_{\beta 12}F^\beta_{a30} + F^a_{\beta 13}F^\beta_{a02} + F^a_{\beta 10}F^\beta_{a23}.$$

Die Integranden sind antisymmetrische Tensoren vierter Stufe und rangieren in dieser Hinsicht neben $\sqrt{g}$, nur haben sie nicht das Gewicht 2 wie diese Größe, sondern das Gewicht Null, so daß ihr Weltintegral vom Maßstab unabhängig einen Sinn hat. Wir bilden nun zunächst ausführlich, um den Gang der Rechnung an einem einfachen Beispiel zu erläutern, die Variation $\delta\mathfrak{B}_1$. Es ist:

$$\mathfrak{B}_1 + \delta\mathfrak{B}_1 = (f_{12} + h_{1/2} - h_{2/1})(f_{30} + h_{3/0} - h_{0/3})$$
$$+ 2 \text{ analoge Glieder mit zykl. Vert. von } 2, 3, 0.$$

[8]) Auch von Weyl angedeutet, s. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr., 2 (1918), S. 391, Z. 24/25.

Nun ist nach der Fundamentalformel (10) für die kovariante partielle ntegration:

$$f_{12}\, h_{3/0} = (f_{12}\, h_3)_{/0} - h_3 \cdot f_{12/0}.$$

Verfährt man so mit allen Gliedern von $\delta \mathfrak{B}_1$, so erhält man

$$\delta \mathfrak{B}_1 = \text{Div.-Gl.} + h_0 (- f_{1/32} + f_{3/12} + f_{1/23} - f_{2/13} + f_{2/31} - f_{3/21}) + h_1 (- f_{2/30} + f_{3/20}) + 2 \cdot 2 \text{ analoge Glieder},$$

o „Div.-Gl." Glieder divergenzartigen Charakters bedeutet, die sich bei er Integration herausheben, da die Variationen (53) am Rande verchwinden[9]). Nun ist weiter nach (19):

$$f_{1/23} - f_{1/32} = f_\alpha \cdot F^\alpha_{123} \quad \text{usw.},$$

omit wird

$$\mathfrak{B}_1 = \text{Div.-Gl.} + h_0 f_\alpha (F^\alpha_{123} + F^\alpha_{231} + F^\alpha_{312}) + h_1 f_\alpha F^\alpha_{320} + 2 \cdot 2 \text{ analoge Glieder},$$

lso nach (16):

$$\delta \mathfrak{B}_1 = \text{Div.-Gl.} + 0.$$

Die Divergenzglieder sind 12 an Zahl und ergeben sich aus dem einen:

$$(f_{12}\, h_3)_{/0}$$

urch Ausführung aller geraden Permutationen von 1 2 3 0 und Summierung.

Ebenso leicht findet man:

$$\delta \mathfrak{B}_2 = \text{Div.-Gl.} + 0.$$

Die 12 Divergenzglieder ergeben sich ebenso wie vorhin aus dem einen:

$$(F^\alpha_{\beta 12}\, \Delta^\beta_{\alpha 3})_{/0}.$$

Als Ergebnis dieses Abschnittes merken wir an:

Die Variation der Weltintegrale über $\mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_2$ *verschwindet lentisch.*

XIII. Das Weltintegral (52).

Die Auswertung der Variation des Integrals (52) erfordert einige echnung, die, da sie kein Interesse weiter bietet, hier unterdrückt werden ll. Die benötigten Formeln sind in den vorhergehenden Abschnitten abeleitet.

a) Wir beginnen mit dem ersten Teil von (52) und schreiben

$$\mathfrak{W}_1 \equiv f\sqrt{g} = \sqrt{g}\, g^{pi}\, g^{qk}\, f_{pq}\, f_{ik}.$$

52)

[9]) Es erfordert dies eine eingehendere Betrachtung, bietet aber keinerlei Schwiegkeit.

Hieraus folgt

$$\mathfrak{W}_1 + \delta\mathfrak{W}_1 = \sqrt{g}\,(1+\tfrac{1}{2}k)(g^{pi}-k^{pi})(g^{qk}-k^{qk})(f_{pq}+h_{p|q}-h_{q|p})(f_{ik}+h_{i|k}-$$

$$\delta\mathfrak{W}_1 = \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_1 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}M_{\varepsilon\zeta} + 4\sqrt{g}\,f^{ik}h_{ik},$$

endlich mit partieller kovarianter Integration des letzten Gliedes:

$$(62') \qquad \delta\mathfrak{W}_1 = \text{Div.-Gl.} + \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_1 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}M_{\varepsilon\zeta} - 4h_\varepsilon(\sqrt{g}\,f^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}.$$

b) Ebenso leicht ist die Bildung der Variation von

$$(63) \qquad \mathfrak{W}_2 \equiv \sqrt{g}\,(g^{\alpha\beta}F^q_{\alpha\beta q})^2.$$

Es ist

$$\mathfrak{W}_2 + \delta\mathfrak{W}_2 = \sqrt{g}\,(1+\tfrac{1}{2}k)[(g^{\alpha\beta}-k^{\alpha\beta})(F^q_{\alpha\beta q}+\Delta^q_{\alpha\beta|q}-\Delta^q_{\alpha q|\beta})]^2,$$

$$\delta\mathfrak{W}_2 = \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_2 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}SS_{\varepsilon\zeta} + 2\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}S(\Delta^p_{\alpha\beta|p}-\Delta^p_{\alpha p|\beta})$$

$$= \text{Div.-Gl.} + \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_2 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}SS_{\varepsilon\zeta} - (\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\beta}(k_{|\alpha}+4h_\alpha)$$

$$+ (\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|p}(2k^p_{\alpha|\beta} - (k_{\alpha\beta}g^{p\gamma})_{|\gamma} + 2\delta^p_\alpha h_\beta - g_{\alpha\beta}h^p),$$

endlich

$$(63') \qquad \delta\mathfrak{W}_2 = \text{Div.-Gl.} + \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_2 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}SS_{\varepsilon\zeta} + 2k(\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}$$

$$- 2k^{\varepsilon\zeta}g_{\alpha\zeta}(\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\varepsilon\beta} - 6h_\varepsilon(\sqrt{g}\,Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}.$$

c) Bei der Bildung der Variation von

$$(64) \qquad \mathfrak{W}_3 = \sqrt{g}\,S_{ik}S^{ik} = \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F^p_{\alpha\beta q}F^q_{\gamma\delta p}$$

stellt sich zunächst ein Tensor vierter Stufe ein, der sich aber mittels der Formel

$$g^{\alpha\beta}(S_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta} - S_{\varepsilon\alpha|\beta\zeta}) = S^{ik}F_{ik\xi k} - V_{\varepsilon\zeta},$$

die leicht aus (20) folgt, eliminieren läßt. Man erhält:

$$(64') \qquad \delta\mathfrak{W}_3 = \text{Div.-Gl.} + \tfrac{1}{2}k\,\mathfrak{W}_3 - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}V_{\varepsilon\zeta} + k(\sqrt{g}\,S^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}$$

$$- 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}S_{\varepsilon\alpha|\xi\beta} + \sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}S_{\varepsilon\zeta|\alpha\beta}$$

$$- h_\varepsilon(\sqrt{g}\,Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha} - 2h_\varepsilon(\sqrt{g}\,S^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}.$$

d) Zur Bildung der Variation von

$$(65) \qquad \mathfrak{W}_4 = \sqrt{g}\,S_{pqik}S^{pqik}$$

ist gleichfalls ein Kunstgriff nötig. Gemäß Bemerkung zu Formel (58) formen wir $\mathfrak{W}_4$ zunächst mittels (48), Zeile 6 um in

$$\mathfrak{W}_4 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_1 - \sqrt{g}\,g^{\alpha i}g^{\beta k}F^p_{q\alpha\beta}F^q_{pik}.$$

Bei der Ausführung der Variation ergibt sich zunächst wieder, daß

ensoren vierter Stufe hereinkommen. Diese lassen sich aber nach kurzem ampfe wieder beseitigen, und schließlich kommt

$$\begin{aligned}5')\quad \delta\mathfrak{W}_4 = \text{Div.-Gl.} &+ \tfrac{1}{2}k\mathfrak{W}_1 - \sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}M_{\varepsilon\zeta} - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}T_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{1}{4}\sqrt{g}\,kf\\ &+ 4\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}(S_{\varepsilon\zeta|\alpha\beta} - S_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta}) - 2\sqrt{g}\,k^{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}f_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta}\\ &- 4h_\varepsilon(\sqrt{g}\,f^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha} + 4h_\varepsilon(\sqrt{g}\,S^{\varepsilon\alpha}) - \sqrt{g}Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}.\end{aligned}$$

XIV. Die Feldgleichungen.

Die Beiträge der Ausdrücke (62′) bis (65′) zu den „elektromagnetischen" und Gravitationsgleichungen sind durch die Faktoren von h_ε bzw. ζ dargestellt. Wir stellen sie nochmals zusammen, indem wir gleichzeitig die Relation (34) benutzen. Es liefert dann *erstens* zu den „elektromagnetischen" Gleichungen die Variation

(62′)	den Beitrag	$-4(\sqrt{g}\,f^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}$;
(63′)	„ „	$-6(\sqrt{g}\,Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}$;
(64′)	„ „	$-2(\sqrt{g}\,Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha} - (\sqrt{g}\,f^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}$;
(65′)	„ „	$-2(\sqrt{g}\,Sg^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha} - 2(\sqrt{g}\,f^{\varepsilon\alpha})_{|\alpha}$.

Die Variation des Integrals von

$$A\cdot(\mathfrak{W}_1 + 4\mathfrak{W}_3 - 4\mathfrak{W}_4) + B\cdot(\mathfrak{W}_2 - 6\mathfrak{W}_3 + 3\mathfrak{W}_4)$$

t unbestimmten Koeffizienten A und B würde also keinen Betrag fern. Die Divergenzen der angeschriebenen Beiträge sind bzw. gleich

$$(0, -6, -2, -2)\,\text{mal}\ (\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}.$$

liefert *zweitens* zu den Gravitationsgleichungen

$$\begin{aligned}&(62')\ \text{den Beitrag}\ g_{\varepsilon\zeta}\mathfrak{W}_1 - 4\sqrt{g}\,M_{\varepsilon\zeta};\\ &(63')\ \text{„ „}\ g_{\varepsilon\zeta}\mathfrak{W}_2 - 4\sqrt{g}\,SS_{\varepsilon\zeta} + 4g_{\varepsilon\zeta}(\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}\\ &\qquad - 2g_{\varepsilon\alpha}(\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\zeta\beta} - 2g_{\zeta\alpha}(\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\varepsilon\beta};\\ &(64')\ \text{„ „}\ g_{\varepsilon\xi}\mathfrak{W}_3 - 4\sqrt{g}\,V_{\varepsilon\zeta} + 2g_{\varepsilon\zeta}(\sqrt{g}\,S^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}\\ &\qquad - 2\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}(S_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta} + S_{\zeta\alpha|\varepsilon\beta} - S_{\varepsilon\zeta|\alpha\beta});\\ &(65')\ \text{„ „}\ g_{\varepsilon\zeta}(\mathfrak{W}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_1) - 4\sqrt{g}\,(T_{\varepsilon\zeta} + \tfrac{1}{2}M_{\varepsilon\zeta})\\ &\qquad - 4\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}(S_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta} + S_{\zeta\alpha|\varepsilon\beta} - 2S_{\varepsilon\zeta|\alpha\beta})\\ &\qquad - 2\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}(f_{\varepsilon\alpha|\zeta\beta} + f_{\zeta\alpha|\varepsilon\beta}).\end{aligned}$$

e Skalare dieser tensoriellen Beiträge sind bzw. gleich

$$(0, +12, +4, +4)\,\text{mal}\ (\sqrt{g}\,Sg^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta},$$

s eine Kontrolle der Rechnung bildet.

Betrachtung der Gravitationsbeiträge zeigt folgendes:

Sie sind aus den symmetrischen Tensoren 2. Stufe und ihren zweiten kovarianten Ableitungen gebildet. Der erste Teil ist in den Krümmungskomponenten quadratisch und bildet für sich einen Tensor vom Skalar Null. Der zweite Teil ist in den zweiten Erweiterungen linear.

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, daß das Glied $g^{\alpha\beta} S_{\varepsilon\zeta|_{\alpha\beta}}$ allein in (64′) und (65′) auftritt. Wenn also in dem noch unbekannten Weltgesetz die Wirkungsdichten $\mathfrak{W}_3$ und $\mathfrak{W}_4$ in der Verbindung $\mathfrak{W}_4 - 4\mathfrak{W}_3$ auftreten würden, so würden sich diese beiden Hauptglieder gerade herausheben. Durch weitere Verfolgung dieses Gedankens ergibt sich unter Benutzung der Formeln (20), (30), (34), (28), (37), (40) die überraschende Tatsache, daß die Variation

$$\delta \int (\mathfrak{W}_4 - 4\mathfrak{W}_3 + \mathfrak{W}_2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_1)\, dx^{1230} \text{ identisch Null} \tag{66}$$

ist. (Dies ist, nebenbei gesagt, der Weg, auf dem ich historisch zu der Relation (40) geführt worden bin, deren anderweitiger Beweis mir eine starke Kontrolle der Rechnung war.)

XV. Ein spezielles Weltgesetz.

Außer dem Wirkungsprinzip (66), das eine Identität liefert, ist nun nur noch ein einziges ausgezeichnet, dessen Integrand von den f_α gänzlich unabhängig, nämlich gleich $\sqrt{g}\, S_4 = \sqrt{g}\, \bar{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{S}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist. Es hat gleichzeitig den Vorzug, daß es für das statische Feld keine überzähligen Gleichungen liefert[10]).

Aus (36″) folgt durch Verjüngung

$$\bar{S}_4 = S_4 - 2S_2 + \tfrac{1}{3}S_0.$$

Wir multiplizieren noch mit 3 und stellen als vermutliches Gravitationsgesetz auf

$$\delta \int (3\mathfrak{W}_4 - 6\mathfrak{W}_3 + \mathfrak{W}_2)\, dx^{1230} = 0. \tag{67}$$

Da der Integrand die f_α nicht enthält, fallen natürlich die „elektromagnetischen Gleichungen“ vollständig unter den Tisch. Aus den angeschriebenen Gravitationsbeiträgen kann man leicht die Gravitationsgleichungen zusammensetzen. Sie enthalten zunächst noch explizite die f_α. Diese müssen sich aber gegen die in den S_{ik} usw. steckenden wegheben, so daß man die Gleichungen am einfachsten findet, indem man die f_α direkt wegläßt und die Weylschen Krümmungskomponenten durch die Riemann-

[10]) Vgl. W. Pauli, Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von H. Weyl, Phys. Zeitschr. vom 15. Oktober 1919.

ien ersetzt, wobei dann die Bemerkung zu Formel (14) in weitestem nfange Platz greift Man erhält die gesuchten Gleichungen in einer r Formen:

$$7') \quad 0 = \sqrt{g}\,[6(g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\zeta/\alpha\beta} - 2R^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha\beta\zeta}) - 2(R_{/\varepsilon\zeta} - 2RR_{\varepsilon\zeta}) - g_{\varepsilon\zeta}(g^{\alpha\beta}R_{/\alpha\beta} - 3R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + RR)];$$

$$7'') \quad 0 = \sqrt{g}\,[6g^{\alpha\beta}(R_{\varepsilon\zeta/\alpha\beta} - R_{\varepsilon\alpha/\zeta\beta} - R_{\zeta\alpha/\varepsilon\beta}) + (-12g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha}R_{\zeta\beta} + 3g_{\varepsilon\zeta}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) + (4R_{/\varepsilon\zeta} - g_{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}R_{/\alpha\beta}) + (4RR_{\varepsilon\zeta} - g_{\varepsilon\zeta}RR)],$$

n denen die letzte die Tensoren 4. Stufe nicht mehr explizite enthält. e Formeln lassen sich aber noch weit eleganter gestalten. Denn nach lation (17) gilt für den Riemannsehen Tensor:

$$g^{\alpha\nu}g^{\beta\delta}R_{\varepsilon\alpha\beta\zeta/\nu\delta} = g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\zeta/\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha/\zeta\beta}.$$

eraus bilde man mit Benutzung von (20)

$$\bar{S}_{\varepsilon\alpha\beta\zeta/\nu\delta} = \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\zeta/\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}R^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha\beta\zeta} + \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha}R_{\zeta\beta} - \tfrac{1}{12}g_{\varepsilon\zeta}g^{\alpha\beta}R_{/\alpha\beta} - \tfrac{1}{6}R_{/\varepsilon\zeta}.$$

tzt man den hieraus folgenden Wert von $g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\zeta/\alpha\beta}$ in (67′) ein und det weiter

$$g^{\alpha\beta}\bar{S}_{\varepsilon\alpha\beta\zeta} = R^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha\beta\zeta} + g^{\alpha\beta}R_{\varepsilon\alpha}R_{\zeta\beta} - \tfrac{2}{3}RR_{\varepsilon\zeta} - \tfrac{1}{2}g_{\varepsilon\zeta}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{6}g_{\varepsilon\zeta}RR,$$

nimmt (67′) die einfache Form an (nach Division durch $12\sqrt{g}$):

$$7''') \quad \boxed{\bar{S}^{\varepsilon\alpha\beta\zeta}_{/\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\bar{S}^{\varepsilon\alpha\beta\zeta}R_{\alpha\beta} = 0,}$$

bei die Erweiterung mittels der Einsteinschen $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ auszuführen ist. e f_α bleiben unbestimmt, beim Übergang von einem Weltpunkt zum chbarpunkt ist nicht nur das Koordinatensystem, sondern auch die dort rrschende Maßbestimmung völlig frei, was mir auch das einzig Ver-nftige zu sein scheint, da das Einzige. das meiner Ansicht nach zur ßstabsübertragung benutzt werden kann, die materielle Substanz, in n bisherigen Ansätzen zur Weylschen Theorie noch keine Stätte ge-nden hat.

Noch sei bemekt, daß (67″) das partikuläre Zwischenintegral besitzt:

$$3) \quad R_{\varepsilon\zeta} = \text{Const}\, g_{\varepsilon\zeta}; \quad R = \text{Const}.$$

es wäre vielleicht der Punkt, wo die lange gesuchte Theorie anzusetzen tte, die die Materie als eine Ausgeburt des Feldes betrachtet. Man nnte nämlich möglicherweise noch ein etwas allgemeineres Integral als 3) finden und die zu (68) hinzutretenden Glieder als Impulsenergie-sor ansprechen. Wahrscheinlich würden dann aber doch die f_α wieder

hereinkommen müssen, die dann allerdings mit Elektromagnetismus zunächst nichts zu schaffen hätten.

XVI. Anwendung auf den kugelsymmetrischen Fall (Einkörperproblem).

1. Bei der Behandlung des Einkörperproblems nach der Einsteinschen Theorie[11]) sind in dem Linienelementquadrat zwei unbekannte Funktionen des Radius zu bestimmen. Bei uns vereinfacht sich die Aufgabe ganz erheblich dadurch, daß wir das ds^2 noch mit einer willkürlichen Funktion multiplizieren können, wodurch sich die Anzahl der Unbekannten auf Eins reduziert. Man überzeugt sich unschwer, daß durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion und Einführung einer passenden Funktion als Radius die Form erreicht werden kann:

$$(69)\quad ds^2 = f^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = f^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,d\varphi^2 - r^2\sin^2\varphi\,d$$

Es ist dann dem Raum zwangsweise die Euklidische Geometrie aufgeprägt. Wir werden sehen, daß dies nicht ohne Singularitäten geht. Bei Anwendung der zweiten Form von (69) wird

$$R_{01,01} = -f^2\alpha;\quad R_{02,02} = -f^2 r^2\beta;\quad R_{03,03} = -f^2 r^2\sin^2\varphi\cdot\beta,$$

wo

$$\alpha = \frac{f''}{f};\quad \beta = \frac{f'}{rf};\quad f' = \frac{df}{dr};\quad f'' = \frac{d^2f}{dr^2}$$

ist. Alle übrigen R_{pqik} verschwinden. Der unabhängige Tensor ist:

$$\bar{R}_{01,01} = -\tfrac{1}{8}f^2(\alpha-\beta);\qquad \bar{R}_{02,02} = +\tfrac{1}{6}f^2 r^2(\alpha-\beta);$$
$$\bar{R}_{03,03} = +\tfrac{1}{6}f^2 r^2\sin^2\varphi(\alpha-\beta);\quad \bar{R}_{23,23} = +\tfrac{1}{3}r^4\sin^2\varphi(\alpha-\beta);$$
$$\bar{R}_{13,13} = -\tfrac{1}{6}r^2\sin^2\varphi(\alpha-\beta);\qquad \bar{R}_{12,12} = -\tfrac{1}{6}r^2(\alpha-\beta),$$

alle übrigen $\bar{R}_{pq,ik}$ verschwinden. Die Invariante $\bar{T}$ ergibt sich aus

$$\bar{T} = 4\cdot T_0^0 = 4\cdot\bar{R}_{0\alpha\beta\gamma}\bar{R}^{0\alpha\beta\gamma} = 8\cdot\sum_{i=1}^{3}(\bar{R}_{0i,0i}\bar{R}^{0i,0i})$$

zu

$$(70)\qquad \bar{T} = \tfrac{4}{3}(\alpha-\beta)^2,$$

also *positiv*, wie *stets bei orthogonalen Koordinaten*. Man kann also ein wirkliches Minimum erwarten, nicht bloß einen stationären Wert. Das Variationsprinzip (67) wird also

$$(71)\qquad \int\tfrac{4}{3}fr^2\sin\varphi\,dt\,dr\,d\varphi\,d\vartheta\left(\frac{f''}{f} - \frac{f'}{rf}\right)^2 = \text{Min}$$

[11]) Siehe z. B. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918, S. 199ff.

ler

1′) $$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f}(rf'' - f')^2 = \text{Min}.$$

ine kleine Umformung erleichtert die Rechnung. Setzen wir nämlich

2) $$r \equiv e^s, \quad f(r) \equiv e^s \cdot g(s); \quad \frac{d\cdot}{dr} = e^{-s} \cdot \frac{d\cdot}{ds},$$

wird das Prinzip:

1″) $$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{g}(g'' - g)^2 = \text{Min},$$

o $g'' \equiv \frac{d^2 g}{ds^2}$ ist. Die Lagrangesche Gleichung zu (71″) lautet:

3) $$2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{g''}{g}\right) + 1 - \frac{g''^2}{g^2} = 0.$$

2. Sie läßt sich vollständig integrieren, wie folgt:

Man setze

4) $$\frac{d^2 g}{ds^2} \equiv g G(s),$$

nn wird aus (73):

5) $$2\frac{d^2 G}{ds^2} = G^2 - 1.$$

Nun genügt die elliptische Funktion $p(u; g_2, g_3)$ der Gleichung

$$\frac{d^2 p(u)}{du^2} = 6\,p(u)^2 - \frac{1}{2} g_2.$$

Also ist das allgemeine Integral von (75):

6) $$G = \frac{12}{\sqrt{12 g_2}} \cdot p(u; g_2, g_3); \quad s = u \cdot \sqrt[4]{12 g_2} + s_0.$$

Die Invarianten g_2, g_3 bilden wegen der Homogenitätseigenschaften n p nur eine einzige Integrationskonstante, die zweite ist s_0.

Hiermit wird (74):

4′) $$\frac{d^2 g}{du^2} = 12\, g \cdot p(u).$$

Da bekanntlich $p'''(u) = 12\, p p'$ ist, kennt man ein partikuläres tegral von (74′), nämlich $g = p'(u)$. Setzt man, um das allgemeine finden,

7) $$g(u) = h(u) \cdot p'(u),$$

kommt für $h(u)$ aus (74′) die Gleichung

4″) $$2h' p'' + p' h'' = 0.$$

Der integrierende Faktor ist p' Dann kommt sofort.

$$h = \text{Const} \int \frac{du}{p'(u)^2}. \tag{78}$$

Die Quadratur läßt sich nach allgemeinen Methoden auswerten, wobei man dann aber sehr gut tut, den gefundenen Wert durch Differentiation zu verifizieren. Wir setzen ihn deshalb direkt hierher. Es ist:

$$\boxed{h = C_1 + C_2\left[\zeta(u) - \frac{3}{2}\frac{g_3}{g_2}u + \frac{2p^2 - 3\frac{g_3}{g_2}p - \frac{1}{3}g_2}{p'}\right].} \tag{79}$$

Im Punkte $u = 0$ $(s = s_0,\ r = r_0)$ ist diese Funktion regulär, ihre Potenzentwicklung beginnt sogar, von C_1 abgesehen, erst mit einem Gliede in u^7, wie man aus (78) sieht. Bei $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ hat sie einfache Pole, die aber in g nach (77) nicht mehr auftreten.

Bei der Integration von (73) sind singuläre Integrale außer acht gelassen worden. Man sieht sofort, daß (75) die Integrale $G = \pm 1$ besitzt. Für diese erhält man aus (74) und (72) leicht die Lösungen

$$f = c_1 r^2 + c_2, \text{ bzw. } f = r(c_1 \cos(lr) + c_2 \sin(lr)). \tag{80}$$

Das Weltintegral (71′) nimmt dabei die Werte an

$$0 \text{ bzw. } c_1 \sin(lr) - c_2 \cos(lr)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Im ersten Fall ist es also sicher ein absolutes Minimum.

3. Ferner sind die Fälle zu betrachten, in denen die elliptischen Funktionen degenerieren, indem ihre absolute Invariante unendlich ist. Es sind dies besonders zwei Fälle (die, nebenbei gesagt, in Pascals Repertorio recht ungleichmäßig und unpraktisch behandelt sind):

a) $\omega_3 = \infty$; $e_1 = \frac{\pi^2}{6\omega_1^2}$; $e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2}$; $g_2 = \frac{\pi^4}{12\omega_1^4}$; $g_3 = \frac{\pi^6}{216\omega_1^6}$; $s = \frac{\pi u}{\omega_1} + s_0$; $p(u) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left(-\frac{1}{3} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi u}{2\omega_1}\right)$.

Man führt die Rechnungen am besten durch nochmalige Auswertung des Integrals (78) aus, welches jetzt so lautet:

$$h = \text{Const} \int \frac{du \sin^6}{\cos^2}, \tag{78′}$$

wo als Argument der trigonometrischen Funktionen zu denken ist:

$$\frac{\pi u}{2\omega_1} = \frac{1}{2} \cdot l\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Man erhält:

$$1) \quad \begin{cases} r = \text{Const}\, e^{\frac{\pi u}{\omega_1}}; \quad f = r \cdot g, \\ g = \text{Const}\frac{\cos}{\sin^3} + \text{Const}\left(\frac{2\sin - \frac{\pi u}{\omega_1} \cdot \cos}{\sin^3} - \frac{2}{3} - \frac{4}{15}\sin^2 \right). \end{cases}$$

Diese Welt hat eine sogenannte Zwiebelschalenstruktur.

b) Bedeutend ansprechender ist der zweite Fall:

$$= \infty; \quad \omega_3 = iw; \quad e_3 = -\frac{\pi^2}{6w^2}, \quad e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2}; \quad g_2 = \frac{\pi^4}{12w^4}; \quad g_3 = \frac{\pi^6}{216w^6},$$

$$s = \frac{\pi u}{w} + s_0; \quad p(u) = \frac{\pi^2}{4w^2}\left(+ \frac{1}{3} + \mathfrak{Cof}^2 \frac{\pi u}{2w} \right).$$

Man erhält

$$2) \quad \begin{cases} r = \text{Const}\, e^{\frac{\pi u}{w}}; \quad f = r \cdot g; \\ g = \text{Const}\frac{\mathfrak{Cof}}{\mathfrak{Sin}^3} + \text{Const}\left(\frac{2\mathfrak{Sin} - \frac{\pi u}{w}\mathfrak{Cof}}{\mathfrak{Sin}^3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15}\mathfrak{Sin}^2 \right), \end{cases}$$

als Argument der Hyperbelfunktionen zu denken ist:

$$\frac{\pi u}{2w} \equiv \frac{1}{2} \cdot l\frac{r}{r_0}.$$

Setzt man dies ein, so verwandeln sich die Hyperbelfunktionen in ebraische.

Da es auf den Maßstab vorerst nicht ankommt, nehmen wir $r_0 = 1$ Dann wird

$$2\mathfrak{Cof} = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad 2\mathfrak{Sin} = \sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}},$$

o schließlich

$$2') \quad g = C_1 \frac{r(r+1)}{(r-1)^3} + C_2 \left[\frac{r(r+1)}{(r-1)^3} lr - \frac{2r}{(r-1)^2} - \frac{1}{6} + \frac{(r-1)^2}{60r} \right].$$

Man überzeugt sich durch Reihenentwicklung, daß das zweite Glied $r = 1$ einen Nullpunkt vierter Ordnung hat.

4. a) Für $C_2 = 0$ erhalten wir eine Formel, die genau der hwarzschildschen Lösung für den leeren Raum außerhalb eines Massenktes entspricht[12]).

b) Aber auch die Schwarzschildsche Lösung für das Innere einer nogenen Flüssigkeitskugel ist in unseren Formeln enthalten. Es läßt nämlich die von Schwarzschild gegebene Lösung

[12]) Weyl, Raum, Zeit. Materie, S. 206, Formel 39.

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi\,\alpha - \cos\chi}{2}\right)^2 dt^2 - \frac{3}{\varkappa\varrho_0}[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\vartheta^2 + \sin^2\chi\sin^2\vartheta\, d\Phi^2]$$

durch Multiplikation mit

$$\frac{\varkappa\varrho_0 r_0}{12}\sec^4\frac{\chi}{2}$$

und Einführung von

$$r = r_0 \cdot \operatorname{tang}\frac{\chi}{2}$$

als Radius auf die Form (69) bringen, wo

$$f = c_1 r^2 + c_2, \quad g = c_1 r + \frac{c_2}{r} \tag{83}$$

ist. Diese Lösung ist aber identisch mit der ersten unserer singulären Lösungen. Gleichzeitig aber ist sie auf zwei Arten als Grenzfall in (82′) enthalten:

α) Setzt man in (82′)

$$r = \varepsilon r';\ C_1 = -\frac{C_1'}{\varepsilon},\ C_2 = +60\,\varepsilon C_2'$$

und geht zur Grenze für $\varepsilon = 0$ über, so kommt (83).

β) Dasselbe geschieht für

$$r = \frac{r'}{\varepsilon};\ C_1 = +\frac{C_1'}{\varepsilon};\ C_2 = +60\,\varepsilon C_2'.$$

Zwischen dem Unendlichnahen und dem Unendlichfernen besteht in dieser Hinsicht kein Unterschied. Diese Beobachtung gilt aber allgemeiner; denn eine Inversion an der Kugel $r = r_0$ ist gleichbedeutend mit einer Umkehrung des Vorzeichens von u. Der Faktor von C_2 in (79) ist aber eine rein ungerade Funktion. Die Inversion kommt also auch im allgemeinen Falle lediglich auf eine Änderung der Integrationskonstanten hinaus.

5. Versucht man, um das Problem des *Elektrons* zu behandeln, statt des Prinzips (71′) das Prinzip

$$\int dr\left\{\frac{1}{f}(rf'' - f')^2 + \text{Const}\, f r^2 \cdot f_{01} f^{01}\right\}, \tag{84}$$

wo jetzt f_{01} die elektrostatische Kraft bezeichnet, so ergibt sich zunächst aus den Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum, daß $f_{01} f^{01} = -\frac{a^2}{r^4}$ wird. Damit tritt dann an Stelle von (71″) das Prinzip

$$\int \frac{ds}{g}[(g'' - g)^2 + \alpha^2 a^2 g^2] = \text{Min.} \tag{84′}$$

Dies Problem läßt sich ebenso leicht lösen, wie für $\alpha = 0$. Man erhält z. B. in dem ausgearteten Fall, der (82′) entspricht:

$$\begin{cases} f = r g, \\ g = C_1 \dfrac{\varrho(\varrho+1)}{(\varrho-1)^3} + C_2 \left(\dfrac{\varrho(\varrho+1)}{(\varrho-1)^3} l\varrho - \dfrac{2\varrho}{(\varrho-1)^2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{(\varrho-1)^2}{60\varrho} \right), \text{ wo} \\ \varrho = r^{\sqrt{1+a^2\alpha^2}} \end{cases}$$

. Führt man ϱ statt r als Radius ein, so wird ds^2 proportional

$$\varrho^2 g^2 dt^2 - \left[\frac{d\varrho^2}{1+a^2\alpha^2} + \varrho^2 d\varphi^2 + \varrho^2 \sin^2\varphi d\vartheta^2 \right].$$

Diese Welt ist in radialer Richtung etwas deformiert, doch kann r ohne Schwierigkeit die Euklidische Geometrie aufgeprägt werden, da n Maßstabsfaktor freigelassen ist (s. o.).

(Eingegangen am 24. Februar 1920.)

Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene und auf der Kugel.

Von

E. Salkowski in Hannover.

1. Es ist seit langem bekannt, daß die rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) der Punkte einer Fläche, die auf ein System von konjugierten Koordinatenlinien (u, v) bezogen ist, einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0 \tag{1}$$

genügen. Sind die Koordinatenlinien überdies orthogonal, d. h. ist die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen, so genügt auch die Verbindung $x^2 + y^2 + z^2$ der Gleichung (1)[1]. In der Ebene, z. B. der Ebene $z = 0$, kann jedes Kurvennetz als konjugiert angesehen werden und es ergibt sich daher für Orthogonalsysteme der Satz:

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y eines ebenen Orthogonalsystems genügen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (1), *und derselben Differentialgleichung genügt auch die Verbindung $x^2 + y^2$.*

Dieser Satz ist neuerdings wiederholt der Untersuchung von Orthogonalsystemen in der Ebene zugrunde gelegt worden[2]. Es ist auch schon bemerkt worden, daß jedes konjugierte Kurvennetz auf dem Rotationsparaboloid

$$x^2 + y^2 = 2pz \tag{2}$$

bei seiner senkrechten Projektion auf die Berührungsebene im Scheitel ein Orthogonalsystem in dieser Ebene $z = 0$ erzeugt und daß umgekehrt jedem

[1]) Vgl. z. B. Bianchi, Differentialgeometrie. 2. Aufl. Leipzig 1910, S. 109–110.

[2]) E. Turrière, Réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan, Bull. de la Soc. Math. de France **40** (1912), S. 228–238; Nouv. Ann. (4) **12** (1912), S. 364–374. — M. Lagally, Über orthogonale Kurvensysteme in der Ebene, Sitzungsbericht d. bayr. Akad. der Wiss. München 1919, S. 123–146.

hogonalsystem der Ebene ein konjugiertes Netz auf dem Paraboloid spricht. Dies ergibt sich einfach aus der Tatsache, daß ein konjugiertes rvennetz auf dem Paraboloid durch eine Gleichung von der Form (1) rakterisiert wird und daß dann infolge der Flächengleichung auch die ßen x, y, $x^2 + y^2$ derselben Differentialgleichung (1) genügen. Es ist h ferner schon darauf hingewiesen, daß man von einem Orthogonalstem in der Ebene durch stereographische Projektion zu den Orthogonalstemen auf der Kugel übergehen kann.

Diese teilweise durch etwas abgelegene Überlegungen und zumeist durch zialisierung aus weit allgemeineren Untersuchungen abgeleiteten Ergebnisse einen mir an sich ein solches Interesse zu haben, daß es wohl nicht rflüssig sein dürfte, die eigentliche geometrische Quelle dieser Tatsache zudecken, von der aus der Zusammenhang am einfachsten zu überauen ist.

Es sei noch an die bekannte aus der geometrischen Definition unmittelr folgende Eigenschaft konjugierter Netze erinnert, die späterhin benutzt d: *Durch Kollineation geht ein konjugiertes Netz wieder in ein konjiertes Netz über.*

2. Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, die der Anschaulichkeit halber senkrecht zuander angenommen seien, werden von einem Augpunkte A aus perspektiv einander bezogen. O_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf $\mathfrak{E}_1$, S Projektion von O_1 auf die Schnittlinie s der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$. nn bildet sich der Kreis mit dem Durchmesser $O_1 S$ in $\mathfrak{E}$ als eine Parabel

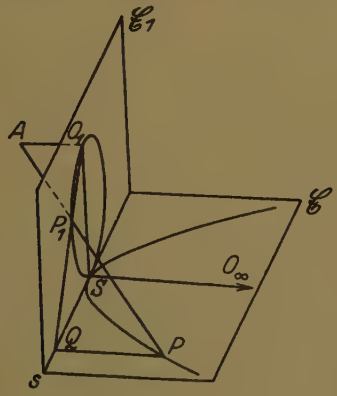

Fig. 1.

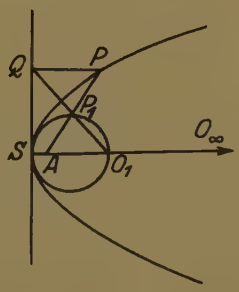

Fig. 2.

deren uneigentlicher Punkt O_∞ das Bild von O_1 ist und deren Achse her das Lot in S auf der Spurlinie s ist. Es sei P das Bild eines beigen Punktes P_1 des Kreises, dann schneidet die Ebene $A O_1 P P_1$ die ene $\mathfrak{E}_1$ des Kreises in einer Sehne $O_1 P_1$, die die Spurlinie s in Q

schneidet und deren Bild die Parabelsehne QP ist, die durch den dem Punkt O_1 entsprechenden Punkt O_∞ der Parabel geht. Daraus folgt, daß QP zu O_1A parallel, also zur Scheiteltangente s der Parabel senkrecht stehen muß. Dreht man nun die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um s, bis sie mit $\mathfrak{E}$ zusammenfällt, so bleibt die perspektiv-kollineare Zuordnung von Kreis und Parabel erhalten, beide Kurven berühren sich und die Gerade s im Punkte S, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte PP_1 schneiden sich in einem Punkte A auf der Achse, dem Zentrum dieser perspektiven Zuordnung der kollokalen ebenen Felder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$.

Konstruiert man in der Ebene einer Parabel mit dem Scheitel S einen Kreis, dessen einer Durchmesser SO_1 auf der Achse der Parabel liegt, projiziert sodann vom Punkte O_1 den Punkt P_1 des Kreises auf die Scheiteltangente der Parabel nach Q und zieht durch Q die Parallele zur Achse, so schneidet diese die Parabel in P. Die durch diese Konstruktion vermittelte Abbildung des Kreises auf die Parabel ist perspektiv-kollinear, und zwar liegt das Kollineationszentrum A auf der Achse der Parabel.

3. Läßt man nun die Ebene um die Parabelachse rotieren, so beschreibt Parabel, Kreis und gemeinsame Tangente ein Drehparaboloid, eine Kugel und deren gemeinsame Berührungsebene, und zwar ist die Kugel auf die Ebene durch stereographische Projektion vom Mittelpunkt O_1 aus, Paraboloid und Ebene durch senkrechte Projektion, Paraboloid und Kugel durch perspektive Kollineation vom Mittelpunkt A aus bezogen.

Wenn eine Kugel ein Drehparaboloid in seinem Scheitel berührt, und die Kugel auf die Berührungsebene stereographisch projiziert und diese durch Parallelprojektion in der Richtung der Achse auf das Paraboloid bezogen wird, so ist die dadurch vermittelte punktweise Beziehung von Kugel und Paraboloid eine perspektive Kollineation, deren Mittelpunkt auf der Achse liegt.

Beachtet man, daß auf einer Kugel jedes konjugierte Kurvennetz orthogonal ist und umgekehrt, so ergibt sich hieraus unmittelbar der Satz von Turrière, wobei man die einander entsprechenden Orthogonalnetze auf der Kugel und der Ebene, sowie das zugehörige konjugierte Netz auf der Parabel in ihrer Abhängigkeit anschaulich vor sich sieht:

Projiziert man ein konjugiertes Netz eines Drehparaboloids auf die Berührungsebene im Scheitel und diese durch stereographische Abbildung auf eine Kugel, die das Paraboloid im Scheitel berührt, so sind die Netze auf Kugel und Paraboloid perspektiv aufeinander bezogen.

Die analytische Darstellung bietet natürlich nicht die geringsten Schwierigkeiten. Ist

$$\varrho^2 = 2pz \qquad (\varrho^2 = x^2 + y^2)$$
$$\varrho_1^2 + z_1^2 - 2rz_1 = 0 \qquad (\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2)$$

Darstellung von Paraboloid und Kugel, so sind die Transformationsmeln der Meridiankurven:

$$\varrho = \frac{2r\varrho_1}{2r - z_1},$$

$$z = \frac{a z_1}{2r - z},$$

bei die Konstante

$$a = \frac{2r^2}{p}$$

setzen ist. Die Verbindungslinie entsprechender Punkte (ϱ, z), (ϱ_1, z_1) nneidet die Z-Achse im Perspektivitätsmittelpunkte A, der vom Nullnkt um

$$\zeta = 2r - a$$

tfernt ist.

4. Die dargelegte Verwandtschaft kann dazu dienen, auf einfachem ege Eigenschaften des Rotationsparaboloids aus denen der Kugel herleiten. Betrachtet man z. B. einen ebenen Schnitt C_2 des Paraboloids, ist das perspektive Bild desselben ein Kegelschnitt auf der Kugel, d. h. n Kreis K; die senkrechte Projektion von C_2 auf die Berührungsebene Scheitel ist aber gleichzeitig die stereographische Projektion des Kreises, o gilt der bekannte Satz:

Jeder ebene Schnitt des Drehparaboloids projiziert sich auf die Behrungsebene im Scheitel als Kreis.

Die geradlinigen Erzeugenden des Paraboloids sind die kollinearen lder der Minimalgeraden der Kugel; da bei stereographischer Projektion ne Minimalgerade wieder in eine Minimalgerade übergeht, so projizieren h die Asymptotenlinien des Paraboloids in die Minimalgeraden der Ebene. ese zerfallen in zwei Scharen derart, daß die Geraden jeder Schar unternander und einer Minimalebene parallel sind. Hieraus folgt, daß die radlinigen Erzeugenden des Drehparaboloids durch zwei Scharen paralleler nimalebenen auf die Berührungsebene im Scheitel senkrecht projiziert rden.

Das Drehparaboloid ist auf zwei verschiedene Arten als geradlinige äche mit isotroper Richtebene aufzufassen. Die Richtebenen sind durch e isotropen Geraden der Berührungsebene im Scheitel bestimmt.

5. Für die Untersuchung der Orthogonalnetze auf der Kugel ist ein n E. Goursat[3]) angegebener Satz von grundlegender Bedeutung, der

[3]) E. Goursat, Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace. American rn. of Math., 18 (1896), S. 347–385. – Bompiani, Sull' equazione di Laplace.

besagt, daß die von einem derartigen Netze abgeleitete Laplacesche Kette wenn überhaupt, so stets nach beiden Richtungen hin abbricht. Wir beschränken uns auf Gebilde im R_3, wo die Ergebnisse unmittelbar anschaulich sind; aus der einfachen analytischen Einkleidung des geometrischen Gedankens ergibt sich dann unmittelbar der Gang der Beweisführung für den R_n.

Ein Punkt P möge auf einer Kugel K das Orthogonalnetz (u, v) beschreiben. Die Tangenten an die u-Kurven ($v =$ konst.) bilden dann eine Strahlenkongruenz, deren erster Brennmantel die Kugel K, deren zweiter Brennmantel die erste Laplacesche Transformierte E_1 der Kugel ist. Reduziert sich E_1 auf eine Kurve, so schneiden sich in jedem Punkte Q von E_1 ∞^1 Tangenten der u-Kurven, und die Kurven $u =$ konst., die nichts anderes sind als die Berührungskurven der Tangenten an die Kugel, die von den Punkten Q ausgehen, sind somit Kreise. Die Ebene eines solchen Berührungskreises ist stets die Polarebene des entsprechendes Punktes Q. Betrachtet man andererseits die Tangenten an die Kurven $u =$ konst., d. h. an die Kreise, so berühren alle die abwickelbare Fläche der Kreisebenen; die -1. Laplacesche Transformierte der Kugel ist nun die zweite Brennfläche E_{-1} dieser Linienkongruenz; sie ist die abwickelbare Fläche, die von den Ebenen der Kreise berührt wird. Hieraus folgt:

Reduziert sich die 1. *Laplacesche Transformierte E_1 einer Kugel auf eine Kurve, so reduziert sich die* -1. *Laplacesche Transformierte E_{-1} auf eine abwickelbare Fläche, nämlich diejenige, die bezüglich der Kugel zur Kurve E_{-1} reziprok polar ist.*

Es ist ein leichtes, von hier aus die von Lagally aufgestellten Klassen $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ von sphärischen Orthogonalsystemen rein geometrisch zu fassen und zu diskutieren. Ohne uns bei dieser einfachen Aufgabe aufzuhalten, verallgemeinern wir den eben durchgeführten Gedankengang.

Zwei Tangenten an die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst., die sich in einem Punkte P der Kugel schneiden, sind reziprok polar. Alle Tangenten an die Kurven $v =$ konst. längs ein und derselben Kurve $u =$ konst. umhüllen eine Kurve C_1 auf der Fläche E_1, während die Tangentenfläche der Kurve $u =$ konst. die Fläche E_{-1} in einer Kurve C_{-1} berührt. Dabei entspricht jedem Punkte der Kurve C_1, der durch die Tangenten an zwei benachbarte u-Kurven bestimmt ist, als Polarebene die Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve $u =$ konst. Daraus folgt:

E_1 und E_{-1} sind stets polar bezüglich der Ausgangskugel.

Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, **34** (1912), S. 383–407. Rendiconti R. Acc. dei Lincei (5), **4** (1915), S. 190–197. C. R. **156**, 603; **160**, 57. – M. Lagally, Beitrag zur Laplaceschen Kaskadenmethode, Math. Ann., **80** (1919), S. 42–61.

Da nun bei polarer Zuordnung konjugierte Systeme immer in konjugierte Systeme übergehen, so wird, sobald weder E_1 noch E_{-1} degenerieren, die Schar der u-Kurven der einen Fläche der Schar der v-Kurven der zweiten Fläche polar zugeordnet sein, d. h. auch die Kongruenz der Tangenten an die Kurven C_{-1} auf E_{-1} ist polar zu den Tangenten der zu C_1 auf E_1 konjugierten Kurven. Aus der beliebig möglichen Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich der Satz:

Konstruiert man für ein Orthogonalsystem auf einer Kugel die Kette der Laplaceschen Transformierten $E_1, E_2, \ldots, E_{-1}, E_{-2}, \ldots$, so sind die Flächen E_k und E_{-k} bezüglich der Kugel reziprok polar. Bricht daher die Kette in E_n mit einer Raumkurve ab, so reduziert sich E_{-n} auf eine abwickelbare Fläche, E_{-n-1} daher auf eine Kurve, die auch in einen Punkt ausarten kann.

Die Laplacesche Kette eines sphärischen Orthogonalsystems kann daher niemals einseitig abbrechen.

Hannover, den 20. April 1920.

(Eingegangen am 24. April 1920.)

Über affine Geometrie XXIX: Die Starrheit der Eiflächen.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Soll eine Eifläche (= geschlossene konvexe Fläche) *stetig so abgeändert werden, daß die Bogenlängen der auf der Fläche gezogenen Kurven ungeändert bleiben und die Fläche nirgends eingeknickt wird, so ist die Eifläche nur wie ein starrer Körper beweglich.* Dieser bekannte Satz ist in zwingender Art zuerst von H. Liebmann begründet worden[1]). Später habe ich ihn mit H. Minkowskis Theorie von „Volumen und Oberfläche" in Zusammenhang gebracht[2]) und auf Grund dieser meiner Bemerkung hat H. Weyl[3]) den Satz von der Starrheit der Eiflächen neu bewiesen. Da die schöne Abhandlung Weyls vielleicht nicht ganz leicht lesbar ist, möchte ich den Beweis von Weyl und mir hier noch einmal vorführen, wie ich ihn mir für Vorlesungszwecke zurechtgelegt habe. Außer den ersten Anfangsgründen der Flächentheorie werden dabei keinerlei Vorkenntnisse vorausgesetzt.

§ 1.

Der Drehriß.

Die Umgebung einer Stelle $\mathfrak{x}$ einer Fläche denken wir uns mittels zweier Parameter u, v dargestellt $x_k = x_k(u, v)$. Die x_k sollen dabei etwa rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Für die Vektoren mit den Koordinaten

$$x_k;\ \frac{\partial x_k}{\partial u},\ \frac{\partial x_k}{\partial v};\ \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial v},\ \frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2}$$

[1]) H. Liebmann, vgl. bes. die Abhandlungen in Math. Annalen, **53** (1900), S. 81–112 und **54** (1901), S. 505–517.

[2]) W. Blaschke, Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen, Göttinger Nachrichten 1912. S. 607–610.

[3]) H. Weyl, Über die Starrheit der Eiflächen und konvexen Polyeder, Berliner Sitzungsberichte 1917, S. 250–266.

oll zur Abkürzung $\mathfrak{x}$; $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$; $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ geschrieben werden, und wir etzen das Vektorprodukt $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ als von Null verschieden und die sechs Vektoren als stetig von u, v abhängig voraus. Wir denken unsere Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in eine Schar deformierter Flächen $\mathfrak{x}(u, v; t)$ eingebettet, so daß twa $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v; 0)$ sein möge. Die Teilableitungen nach t für $t = 0$ ollen durch ein vorgesetztes δ gekennzeichnet werden. Soll dann die Formänderung so stattfinden, daß die Bogenlängen der auf unserer Fläche gezogenen Kurven erhalten bleiben, so muß

$$\delta\, ds^2 = \delta\,(d\mathfrak{x})^2 = 0 \tag{1}$$

ein, oder, wenn man für

$$\delta\mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}(u, v; 0)}{\partial t} = \mathfrak{z}(u, v) \tag{2}$$

etzt, muß das skalare Produkt verschwinden

$$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = 0. \tag{3}$$

omit kann man den Vektor $d\mathfrak{z}$ mittels eines Hilfsvektors $\mathfrak{y}(u, v)$ durch in Vektorprodukt darstellen

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}. \tag{4}$$

Dieser Vektor $\mathfrak{y}$ ist nichts andres als der Drehvektor des starren Körpers, der an unsere deformierte Fläche an der Stelle $\mathfrak{x}$ angeheftet gedacht werden kann. Trägt man alle Vektoren $\mathfrak{y}(u, v)$ vom Ursprung aus ab, so beschreibt der Endpunkt $\mathfrak{y}$ im allgemeinen eine Fläche, die ich als den „*Drehriß*" der Verbiegung der Fläche $(\mathfrak{x})$ zu bezeichnen pflege.

Nach (4) ist

$$\mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} = (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_u)\, du + (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_v)\, dv \tag{5}$$

in vollständiges Differential und somit ist

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u. \tag{6}$$

Die Vektoren $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ müssen danach durch die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ darstellbar sein

$$\mathfrak{y}_u = \alpha\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{y}_v = \gamma\mathfrak{x}_u + \delta\mathfrak{x}_v \tag{7}$$

nd aus (6) folgt für die skalaren Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ überdies

$$\alpha + \delta = 0. \tag{8}$$

Durch Ableitung nach u, v folgt aus (6) noch

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{uu} \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uu} - \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{uv}, \\ \mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uv} - \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{vv}. \end{cases} \tag{9}$$

Multipliziert man die erste Gleichung skalar mit $\mathfrak{x}_v$, die zweite mit $\mathfrak{x}_u$, so ergibt sich durch Subtraktion zwischen den entstehenden dreireihigen Determinanten die Beziehung

$$(10) \qquad (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_u) = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{y}_u).$$

Führt man für die Determinanten die Abkürzungen ein

$$(11) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = L, \\ (\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = M, \\ (\mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = N, \end{cases}$$

so folgt aus (10) mittels (7) und (8)

$$(12) \qquad \gamma L - 2\alpha M - \beta N = 0.$$

Ist die Fläche $(\mathfrak{x})$ elliptisch gekrümmt

$$(13) \qquad LN - M^2 > 0,$$

so sind auf $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ entsprechende Umlaufsinne entsprechender Stellen entgegengesetzt, d. h. in (7) ist

$$(14) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha^2 - \beta\gamma \leqq 0.$$

In der Tat! Die Punkte (ξ_k homogene Punktkoordinaten in der Ebene!)

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi_1 = +L, & \xi_2 = +M, & \xi_3 = +N; \\ \xi_1' = -\beta, & \xi_2' = +\alpha, & \xi_3' = +\gamma \end{cases}$$

sind wegen (12) oder $\xi_1 \xi_3' - 2\xi_2 \xi_2' + \xi_3 \xi_1' = 0$ zum Kegelschnitt $\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 = 0$ konjugiert und der erste ist nach (13) innerer, also der zweite äußerer Punkt dieses Kegelschnitts. Somit ist im allgemeinen $\xi_1' \xi_3' - \xi_2'^2 = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$. Insbesondere kann

$$(16) \qquad -\alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

nur dann sein, wenn die homogenen Punktkoordinaten ξ' versagen, wenn also

$$(17) \qquad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

ist.

§ 2.

Formeln für H. Minkowskis gemischten Rauminhalt.

Haben wir zwei aufeinander bezogene einfach zusammenhängende Flächenstücke $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$, so soll das Doppelintegral Minkowskis

$$(18) \qquad \iint (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv$$

umgeformt worden.

Es ist

$$19) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{uv}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_{uv}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}_u) \end{cases}$$

und durch Abziehen

$$20) \quad 2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v) = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}).$$

Somit ist

$$21) \quad 2\iint(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \iint\{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\mathfrak{y})\}\,du\,dv + \int(\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}),$$

wo das letzte Integral in einem geeigneten Umlaufsinn längs des Randes zu erstrecken ist.

Aus dem Integral (18) erkennt man durch Einführung neuer (gleichsinniger) Parameter u, v, daß der Integralwert von der Parameterwahl nicht abhängt. Ebenso ist das Randintegral in (21) offenbar von den Parametern unabhängig.

§ 3.

Der Starrheitsbeweis.

Wenden wir jetzt die Formel (21) auf den Fall von § 1 an, wo die Flächen $(\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{y})$ durch die Beziehung (6) aneinander gebunden sind, so fällt das Doppelintegral rechter Hand weg:

$$22) \quad 2\iint(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \int(\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}).$$

Ist ferner $(\mathfrak{x})$ eine geschlossene konvexe Fläche, so können wir sie durch eine doppelpunktfreie geschlossene Linie in zwei Teilflächen zerschneiden und auf jede die Formel (22) anwenden. Dann folgt durch Addition, da sich die beiden Randintegrale gegenseitig tilgen,

$$23) \quad \iint(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = 0.$$

Der „gemischte Rauminhalt" von $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ ist also Null. Andrerseits ist für jede der beiden Teilflächen nach (7), (8),

$$24) \quad \iint(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \iint(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)(-\alpha^2 - \beta\gamma)\,du\,dv.$$

Demnach ist, wenn wir den Ursprung im Innern der Eifläche und die u, v-Linien in beiden Teilstücken der zerschnittenen Eifläche etwa so zählen, daß

$$25) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) > 0$$

ausfällt, wegen (14) der Integrand $\leqq 0$ und das Integral kann wegen der Stetigkeit des Integranden nur so verschwinden, daß $-\alpha^2 - \beta\gamma = 0$, also

nach (16), (17) α, β, γ einzeln identisch Null sind. Dann ist aber nach (7) der Vektor $\mathfrak{y}$ für alle Punkte $\mathfrak{x}$ derselbe. Die Formel (4) gibt integriert

$$\mathfrak{z} = \delta\mathfrak{x} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{y} \times \mathfrak{x} \tag{26}$$

und bedeutet, daß die Fläche $(\mathfrak{x})$ als starrer Körper bewegt wird, denn die geradlinige Entfernung irgend zweier Flächenpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ bleibt fest:

$$\delta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)^2 = 2(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 2(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 0. \tag{27}$$

Soll zu jeder Zeit t für unsere deformierte Fläche $\mathfrak{x}(u, v, t)$ die Erhaltung des Bogenelements gelten

$$\frac{\partial}{\partial t} ds^2 = 0, \tag{28}$$

so bleibt demnach die geradlinige Entfernung irgend zweier Flächenpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ von t unabhängig: d. h. die Fläche ist nur als starrer Körper beweglich. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Deutet man den Drehriß statisch als Kräfteplan[4]), so kann man das gefundene Ergebnis auch so aussprechen:

In einer Eifläche, die aus einem biegsamen und undehnbaren Material (etwa Papier) hergestellt ist, können keine Selbstspannungen herrschen.

Es wäre wünschenswert, den Starrheitssatz für Eiflächen ohne die einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen von § 1 in voller Allgemeinheit zu beweisen.

Schließlich bliebe auch noch zu rechtfertigen, daß ich diese kleine Arbeit unter die zur „Affingeometrie" aufgenommen habe. Es ist aber in der Tat der Zusammenhang zwischen einer Fläche $(\mathfrak{x})$ und ihrem „Drehriß" $(\mathfrak{y})$ oder der Zusammenhang zwischen zwei derartigen „reziproken Kräfteplänen" affininvariant, und damit ist gezeigt, daß die Theorie der infinitesimalen Biegungen zur affinen Geometrie gehört[5]).

Hamburg, zu Pfingsten 1920.

---

[4]) Vgl. etwa W. Blaschke, Wackelige Achtflache, Math. Zeitschr., 6 (1920), S. 85–93 oder besonders H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 21–48, bes. S. 25.

[5]) In gewissem Sinn gehört diese Theorie sogar zur *projektiven* Geometrie, wie für krumme Flächen G. Darboux (Théorie des surfaces IV, 1896, S. 76, Nr. 900) und für Vielflache (Fachwerke) kürzlich H. Liebmann (Ausnahmefachwerke und ihre Determinante, Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 197–227, bes. S. 220) gezeigt hat.

(Eingegangen am 28. Mai 1920.)

Congruence properties of partitions.

By

S. Ramanujan †.

[Extracted from the manuscripts of the author by G. H. Hardy[1])].

1. Let

1. 11) $$P = 1 - 24\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \ldots\right),$$

1. 12) $$Q = 1 + 240\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^3x^3}{1-x^2} + \frac{3^3x^3}{1-x^3} + \ldots\right),$$

[1]) Srinivasa Ramanujan, Fellow of Trinity College, Cambridge, and of the oyal Society of London, died in India on 26 April, 1920, aged 32. The manuscript om which this note is derived is a sequel to a short memoir *Some properties of (n), the number of partitions of n*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 9 (1919), 207–210. In this memoir Ramanujan proves that

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

nd

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7,$$

nd states without proof a number of further congruences to moduli of the form $a^a 7^b 11^c$, of which the most striking is

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Here new proofs are given of the first two congruences, and the first published proof f the third.

The manuscript contains a large number of further results. It is very incomplete, nd will require very careful editing before it can be published in full. I have taken om it the three simplest and most striking results, as a short but characteristic xample of the work of a man who was beyond question one of the most remarkable athematicians of his time.

I have adhered to Ramanujan's notation, and followed his manuscript as closely s I can. A few insertions of my own are marked by brackets. The most substantial f these is in § 5, where Ramanujan's manuscript omits the proof of (5. 4). Whe- ier I have reconstructed his argument correctly I cannot say.

The references given in the footnotes to ‚Ramanujan' are to his memoir *On rtain arithmetical functions*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 2, no. 9 (1916), 159–184.

$$(1.13)\qquad R = 1 - 504\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^5 x^2}{1-x^2} + \frac{3^5 x^3}{1-x^3} + \ldots\right),$$

$$(1.2)\qquad f(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$

Then it is well known that

$$(1.3)\qquad f(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{1}{2}n(3n-1)} + x^{\frac{1}{2}n(3n}\right.$$

$$(1.4)\qquad Q^3 - R^2 = 1728\, x(f(x))^{24}.$$

Further, let

$$(1.51)\qquad \Phi_{r,s}(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^r n^s x^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \sigma_{s-r}(n)\, x^n,$$

where $\sigma_k(n)$ is the sum of the k-th powers of the divisors of n; so that

$$(1.52)\qquad \Phi_{0,s}(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{2^s x^2}{1-x^2} + \frac{3^s x^3}{1-x^3} + \ldots,$$

and in particular

$$(1.53)\quad P = 1 - 24\,\Phi_{0,1}(x),\quad Q = 1 + 240\,\Phi_{0,3}(x),\quad R = 1 - 504\,\Phi_{0,5}(x).$$

Then [it may be deduced from the theory of the elliptic modular functions, and has been shown by the author in a direct and elementary manner[2]), that, when $r+s$ is odd, and $r<s$, $\Phi_{r,s}(x)$ is expressible as a polynomial in P, Q, and R, in the form

$$\Phi_{r,s}(x) = \sum k_{l,m,n} P^l Q^m R^n,$$

where

$$l - 1 \leqq \mathrm{Min}(r,s),\quad 2l + 4m + 6n = r + s + 1.$$

In particular[3])]

$$(1.61)\quad Q^2 = 1 + 480\,\Phi_{0,7}(x) = 1 + 480\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^7 x^2}{1-x^2} + \ldots\right),$$

$$(1.62)\quad QR = 1 - 264\,\Phi_{0,9}(x) = 1 - 264\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^9 x^2}{1-x^2} + \ldots\right),$$

$$(1.63)\quad 441\,Q^3 + 250\,R^2 = 691 + 65520\,\Phi_{0,11}(x)$$
$$= 691 + 65520\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^{11} x^2}{1-x^2} + \ldots\right),$$

---

[2]) Ramanujan, p. 165.

[3]) Ramanujan, pp. 164–166 (Tables I to III). Ramanujan carried the calculation of formulae of this kind to considerable lengths, the last formulae of Table I being

$$7\,709\,321\,041\,217 + 32640\,\Phi_{0,31}(x) = 764\,412\,173\,217\,Q^3$$
$$+ 5\,323\,905\,468\,000\,Q^5 R^2 + 1\,621\,003\,400\,000\,Q^3 R^4.$$

It is worth while to quote one such formula; for it is impossible to understand Ramanujan without realising his love of numbers for their own sake.

. 71) $$Q - P^2 = 288\,\Phi_{1,2}(x),$$

. 72) $$PQ - R = 720\,\Phi_{1,4}(x),$$

. 73) $$Q^2 - PR = 1008\,\Phi_{1,6}(x),$$

. 74) $$Q(PQ - R) = 720\,\Phi_{1,8}(x),$$

. 81) $$3PQ - 2R - P^3 = 1728\,\Phi_{2,3}(x),$$

. 82) $$P^2Q - 2PR + Q^2 = 1728\,\Phi_{2,5}(x),$$

. 83) $$2PQ^2 - P^2R - QR = 1728\,\Phi_{2,7}(x),$$

. 91) $$6P^2Q - 8PR + 3Q^2 - P^4 = 6912\,\Phi_{3,4}(x),$$

. 92) $$P^3Q - 3P^2R + 3PQ^2 - QR = 3456\,\Phi_{3,6}(x),$$

. 93) $$15PQ^2 - 20P^2R + 10P^3Q - 4QR - P^5 = 20736\,\Phi_{4,5}(x).$$

Modulus 5.

2. We denote generally by J an integral power-series in x whose efficients are integers. It is obvious from (1. 12) that

$$Q = 1 + 5J.$$

Also $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$, and so, from (1. 11) and (1. 13),

$$R = P + 5J.$$

Hence

$$Q^3 - R^2 = Q(1 + 5J)^2 - (P + 5J)^2 = Q - P^2 + 5J.$$

Using (1. 4), (1. 71), and (1. 51), we obtain

. 1) $$1728\,x(f(x))^{24} = 288\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,x^n + 5J.$$

so

$$(1 - x)^{25} = 1 - x^{25} + 5J,$$

$$(f(x))^{25} = f(x^{25}) + 5J,$$

nd so

. 2) $$(f(x))^{24} = \frac{f(x^{25})}{f(x)} + 5J.$$

But

$$\frac{1}{f(x)} = 1 + p(1)\,x + p(2)\,x^2 + \ldots,$$

d therefore, by (2. 1) and (2. 2).

. 3) $$1728\,x\,f(x^{25})(1 + p(1)\,x + p(2)\,x^2 + \ldots)$$

$$= 1728\,x\,\frac{f(x^{25})}{f(x)} = 1728\,x(f(x))^{24} + 5J = 288\sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma_1(n)\,x^n + 5J.$$

Multiplying by 2, rejecting multiples of 5, and replacing $f(x^{25})$ by its expansion given by (1. 3), we obtain

$$(x - x^{26} - x^{51} + x^{126} + \ldots)(1 + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_1(n)x^n + 5J.$$

Hence

$$(2.\ 4)\quad p(n-1) - p(n-26) - p(n-51) + p(n-126) + p(n-176) - p(n-301) - \ldots \equiv n\sigma_1(n) \pmod 5,$$

the numbers 1, 26, 51, ... being the numbers of the forms

$$\tfrac{25}{2}n(3n-1)+1, \quad \tfrac{25}{2}n(3n+1)+1,$$

or, what is the same thing, of the forms

$$\tfrac{1}{2}(5n-1)(15n-2), \quad \tfrac{1}{2}(5n+1)(15n+2).$$

In particular it follows from (2. 3) that

$$(2.\ 5)\qquad p(5m-1) \equiv 0 \pmod 5.$$

Modulus 7.

3. It is obvious from (1. 13) that

$$R = 1 + 7J.$$

Also $n^7 - n \equiv 0 \pmod 7$, and so, from (1. 11) and (1. 61),

$$Q^2 = P + 7J.$$

Hence

$$(Q^3 - R^2)^2 = (PQ - 1 + 7J)^2 = P^2Q^2 - 2PQ + 1 + 7J = P^3 - 2PQ + R + 7J.$$

But, from (1. 72) and (1. 81),

$$P^3 - 2PQ + R = 144\sum_{n=1}^{\infty}(5n\sigma_3(n) - 12n^2\sigma_1(n))x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2\sigma_1(n) - n\sigma_3(n))x^n + 7J.$$

And therefore

$$(3.\ 1)\qquad (Q^3 - R^2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2\sigma_1(n) - n\sigma_3(n))x^n + 7J.$$

Again (by the same argument which lead to (2. 2)) we have

$$(3.\ 2)\qquad (f(x))^{48} = \frac{f(x^{49})}{f(x)} + 7J.$$

Combining (3. 1) and (3. 2), we obtain

$$x^2\frac{f(x^{49})}{f(x)} = x^2(f(x))^{48} + 7J = 1728^2 x^2 (f(x))^{48} + 7J$$
$$= (Q^3 - R^2)^2 + 7J$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n^2\sigma_1(n) - n\sigma_3(n))x^n + 7J. \quad (3.3)$$

From (3. 3) it follows (just as (2. 4) and (2. 5) followed from (2. 3)) that

$$p(n-2) - p(n-51) - p(n-100) + p(n-247) + p(n-345) - p(n-590) - \ldots \equiv n^2\sigma_1(n) - n\sigma_3(n) \pmod 7, \quad (3.4)$$

the numbers $2, 51, 100, \ldots$ being those of the forms

$$\tfrac{1}{2}(7n-1)(21n-4), \quad \tfrac{1}{2}(7n+1)(21n+4);$$

and that

$$p(7m-2) \equiv 0 \pmod 7. \quad (3.5)$$

Modulus 11.

4. It is obvious from (1. 62) that

$$QR \equiv 1 + 11J. \quad (4.1)$$

Also $n^{11} - n \equiv 0 \pmod{11}$, and so, from (1. 11) and (1. 63),

$$Q^3 - 3R^2 = 441Q^3 + 250R^2 + 11J \quad (4.2)$$
$$= 691 + 65520\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2^{11}x^2}{1-x^2} + \ldots\right) + 11J$$
$$= -2 + 48\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \ldots\right) + 11J$$
$$= -2P + 11J.$$

It is easily deduced that

$$(Q^3 - R^2)^5 = (Q^3 - 3R^2)^5 - Q(Q^3 - 3R^2)^3 - R(Q^3 - 3R^2)^2 + 6QR + 11J$$
$$= P^5 - 3P^3Q - 4P^2R + 6QR + 11J. \quad (4.3)$$

[For

$$(Q^3 - 3R^2)^5 - Q(Q^3 - 3R^2)^3 - R(Q^3 - 3R^2)^2 + 6QR$$
$$= (Q^3 - 3R^2)^5 - Q^3R^2(Q^3 - 3R^2)^3 - Q^3R^4(Q^3 - 3R^2)^2 + 6Q^6R^6 + 11J$$
$$= Q^{15} - 16Q^{12}R^2 + 98Q^9R^4 - 285Q^6R^6 + 423Q^3R^8 - 243R^{10} + 11J$$
$$= (Q^3 - R^2)^5 + 11J$$

by (4. 1), and (4. 3) then follows from (4. 2).]

Again, [if we multiply (1. 74), (1. 83), (1. 92), and (1. 93) by -1, -4, and -1, and add, we obtain, on rejecting multiples of 11,]

$$P^5-3P^3Q-4P^2R+6QR=-5\Phi_{1,8}+3\Phi_{2,7}+3\Phi_{3,6}-\Phi_{4,5}+11J;$$

and from this and (4. 3) follows

$$(4.\ 4)\quad (Q^3-R^2)^5=-\sum_{n=1}^{\infty}(5n\sigma_7(n)-3n^2\sigma_5(n)-3n^3\sigma_3(n)+n^4\sigma_1(n))x^n+11$$

But (by the same argument which led to (2. 2) and (3. 2)) we have

$$(4.\ 5)\qquad (f(x))^{120}=\frac{f(x^{121})}{f(x)}+11J.$$

From (4. 4) and (4. 5)

$$\begin{aligned}x^5\frac{f(x^{121})}{f(x)}&=x^5(f(x))^{120}+11J=1728^5\,x^5(f(x))^{120}+11J\\&=(Q^3-R^2)^5+11J\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(5n\sigma_7(n)-3n^2\sigma_5(n)-3n^3\sigma_3(n)+n^4\sigma_1(n))x^n+11J.\end{aligned}$$

It now follows as before that

$$\begin{aligned}(4.\ 6)\quad &p(n-5)-p(n-126)-p(n-247)+p(n-610)+p(n-852)\\&-p(n-1457)-\ldots\equiv-n^4\sigma_1(n)+3n^3\sigma_3(n)+3n^2\sigma_5(n)\\&-5n\sigma_7(n)\pmod{11},\end{aligned}$$

$5, 126, 247, \ldots$ being the numbers of the forms

$$\tfrac{1}{2}(11n-2)(33n-5),\quad \tfrac{1}{2}(11n+2)(33n+5);$$

and in particular that

$$(4.\ 7)\qquad p(11m-5)\equiv 0\pmod{11}.$$

5. If we are only concerned to prove (4. 7), it is not necessary to assume quite so much.

Let us write ϑ for the operation $x\frac{d}{dx}$. Then[4]) we have

$$(5.\ 11)\qquad \vartheta P=\tfrac{1}{12}(P^2-Q),$$

$$(5.\ 12)\qquad \vartheta Q=\tfrac{1}{3}(PQ-R),$$

$$(5.\ 13)\qquad \vartheta R=\tfrac{1}{2}(PR-Q^2).$$

From these equations we deduce [by straight-forward calculation

$$\begin{aligned}864\,\vartheta^4P&=P^5-10P^3Q-15PQ^2+20P^2R+4QR,\\72\,\vartheta^3Q&=\quad 5P^3Q+15PQ^2-15P^2R-5QR,\\24\,\vartheta^2R&=\quad -14PQ^2+7P^2R+7QR.\end{aligned}$$

---

[4]) Ramanujan, p. 165.

The left hand side of each of these equations is of the form

$$x\frac{dJ}{dx}.$$

Multiplying by 1, 8, and 2, adding, and rejecting multiples of 11, we find

(5. 2) $$P^5 - 3P^3Q + 2P^2R = x\frac{dJ}{dx} + 11J.$$

We have also, by (5. 11)

$$6P^2R - 6QR = 72xR\frac{dP}{dx}.$$

But, differentiating (4. 2), and using (4. 1), we obtain

$$\begin{aligned} 72xR\frac{dP}{dx} &= 36xR\left(-3Q^2\frac{dQ}{dx} + 6R\frac{dR}{dx}\right) + 11J \\ &= -108xQ\frac{dQ}{dx} + 216xR^2\frac{dR}{dx} + 11J \\ &= x\frac{dJ}{dx} + 11J. \end{aligned}$$

Hence

(5. 3) $$6P^2R - 6QR = x\frac{dJ}{dx} + 11J.$$

From (5. 2) and (5. 3) we deduce

$$P^5 - 3P^3Q - 4P^2R + 6QR = x\frac{dJ}{dx} + 11J,$$

and from (4. 3)]

(5. 4) $$(Q^3 - R^2)^5 = x\frac{dJ}{dx} + 11J.$$

Finally, from (4. 5) and (5. 4),

$$\begin{aligned} x^5\frac{f(x^{121})}{f(x)} &= x^5(f(x))^{120} + 11J = (Q^3 - R^2)^5 + 11J \\ &= x\frac{dJ}{dx} + 11J. \end{aligned}$$

As the coefficient of x^{11m} on the right hand side is a multiple of 11, (4. 7) follows immediately.

(Eingegangen am 20. Juli 1920.)

Zur Theorie der Minimalflächen.

Von

Torsten Carleman in Upsala.

Im folgenden wird der Satz bewiesen:

Der Flächeninhalt S einer durch eine Raumkurve C, von der Länge L, hindurchgelegten Minimalfläche (T) genügt der Ungleichung

$$S \leqq \frac{1}{4\pi} L^2. \tag{1}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn C ein Kreis ist.

Wenn die Kurve C eben ist, so wird die zugehörige Minimalfläche eine Ebene. Die Ungleichung (1) drückt in diesem Falle die bekannte isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises aus.

Um die Darstellung möglichst zu vereinfachen, nehmen wir an, daß C analytisch sei. Nach S. Bernstein läßt sich dann die Minimalfläche über C hinaus analytisch fortsetzen. Die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche können wir mittels der Weierstraßschen Formeln

$$\begin{cases} x = R\int (1-u^2)\,F(u)\,du, \\ y = R\int i(1+u^2)\,F(u)\,du, \\ z = R\int 2u\,F(u)\,du \end{cases} \tag{2}$$

als Funktionen der komplexen Veränderlichen u darstellen.

Die hier auftretende analytische Funktion $F(u)$ und der Variabilitätsbereich von u ergeben sich folgendermaßen. X, Y, Z mögen die Koordinaten des sphärischen Bildes von (x, y, z) sein (d. h. X, Y, Z sind die Richtungskosinus der Normale im Punkte x, y, z). Wenn (x, y, z) die Minimalfläche T beschreibt, so durchläuft X, Y, Z auf der Einheitskugel eine gewisse einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche T_1, die nur

Windungspunkte endlicher Ordnung besitzt. Diese entsprechen denjenigen Punkten, wo die Hauptkrümmungen verschwinden[1]).

u und $F(u)$ sind gegeben durch[2])

$$-u = \frac{dx + i\,dy}{dz}, \qquad F(u) = \frac{dx - i\,dy}{du}, \tag{3}$$

wo die Differentiale längs einer durch (x, y, z) hindurchgehenden Minimallinie der Fläche zu nehmen sind. Aus (3) ergibt sich leicht, daß $F(u)$ eine eindeutige Funktion auf T und T_1 ist. Die Richtung einer Minimallinie durch den Punkt (x, y, z) kehrt nämlich zu ihrem Anfangswert zurück, wenn (x, y, z) auf der einfach zusammenhängenden Fläche T eine geschlossene Kurve beschreibt, weil ja die Tangenten der beiden, durch einen Punkt auf T hindurchgehenden, Minimallinien niemals zusammenfallen können.

Projiziert man vom Punkte $(0, 0, 1)$ des X, Y, Z-Raumes aus die Fläche T_1 in die XY-Ebene, die wir als u-Ebene wählen können, so erhält sich eine einfach zusammenhängende ebene Riemannsche Fläche T_2, die den Variabilitätsbereich von u ausmacht.

Wenn T keine Ebene ist, definieren die Formeln (2) eine konforme Abbildung von T auf T_2. Wir finden für das Quadrat des Linienelementes $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, indem wir $u = \alpha + i\beta$ schreiben,

$$ds^2 = (1 + |u|^2)^2\,|F(u)|^2\,(d\alpha^2 + d\beta^2). \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich für die Größen S und L

$$S = \iint_{T_2} (1 + |u|^2)^2\,|F(u)|^2\,d\alpha\,d\beta, \tag{5}$$

$$L = \int_{C_2} (1 + |u|^2)\,|F(u)|\,|du|. \tag{6}$$

---

[1]) Für nicht ebene Minimalflächen können die Hauptkrümmungen nur in isolierten Punkten gleichzeitig verschwinden. Denn hätten wir längs einer Linie γ

$$r = s = t = 0,$$

so wären wegen

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

die partiellen Ableitungen p und q längs γ konstant. So müßte infolge der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die Ebene (E)

$$z - px - qy = c \qquad (c = \text{Konstante})$$

die Kurve γ enthalten und die Minimalfläche längs γ berühren. Dann müßte aber, weil γ keine Charakteristik der Fläche sein kann, die Ebene E mit der Minimalfläche zusammenfallen, gegen die Voraussetzung.

[2]) Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, I (deuxième édition), S. 341.

C_2 bedeutet hier die Berandung von T_2. Weil T_2 einfach zusammenhängend ist, gibt es eine analytische Funktion $\varphi(z)$, die T_2 konform auf den Einheitskreis abbildet. Mit Hilfe dieser Funktion transformieren sich die Formeln (5) und (6) in die folgenden:

$$(7) \qquad S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + |\varphi(z)|^2)^2 \, |F(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2 \, r \, dr \, d\theta \quad (z = re^{i\theta}),$$

$$(8) \qquad L = \int_0^{2\pi} (1 + |\varphi(z)|^2) \, |F(\varphi(z))| \, |\varphi'(z)| \, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Führen wir hier die Funktionen

$$(9) \qquad f_1(z) = F(\varphi(z)) \, \varphi(z)^2 \, \varphi'(z),$$

$$(10) \qquad f_2(z) = F(\varphi(z)) \, \varphi'(z)$$

ein, so ergibt sich

$$S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (|f_1(z)| + |f_2(z)|)^2 \, r \, dr \, d\theta \qquad (z = re^{i\theta}),$$

$$L = \int_0^{2\pi} (|f_1(z)| + |f_2(z)|) \, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Aus den Gleichungen

$$S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1(z)|^2 \, r \, dr \, d\theta + \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_2(z)|^2 \, r \, dr \, d\theta + 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1(z)| \cdot |f_2(z)| \, r \, dr \, d\theta,$$

$$L^2 = \left[\int_0^{2\pi} |f_1(z)| \, d\theta \right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} |f_2(z)| \, d\theta \right]^2 + 2 \int_0^{2\pi} |f_1(z)| \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |f_2(z)| \, d\theta$$

schließen wir nun, daß unser Satz (1) bewiesen ist, falls wir zeigen, daß

$$(11) \qquad \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1(z)| \cdot |f_2(z)| \, r \, dr \, d\theta \leqq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(e^{i\theta})| \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\theta})| \, d\theta,$$

sobald $f_1(z)$ und $f_2(z)$ im abgeschlossenen[3]) Einheitskreise reguläre Funktionen sind ($z = re^{i\theta}$).

Daß die Funktionen (9) und (10) dieser Bedingung genügen, folgt leicht aus der Tatsache, daß die Integrale

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1(z)|^2 \, r \, dz \, d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_2(z)|^2 \, r \, dz \, d\theta$$

wegen der Endlichkeit des Flächeninhaltes S konvergent sind[3]). Beim Beweise von (11) können wir uns auf Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ beschränken, die für $|z| < 1$ nicht verschwinden. Denn, bezeichnen wir mit

[3]) Ein näheres Studium von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ ergibt, daß diese Funktionen auch auf dem Einheitskreise regulär sind.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Nullstellen von $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$, so gelten für die Funktionen

$$f_1^*(z) = f_1(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\bar{a}_\nu z - 1}{z - a_\nu},$$

$$f_2^*(z) = f_2(z) \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\bar{b}_\nu z - 1}{z - b_\nu},$$

die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} |f_1^*(z)| &> |f_1(z)|, \\ |f_2^*(z)| &> |f_2(z)|, \end{aligned}\right\} \quad (|z| < 1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} |f_1^*(z)| &= |f_1(z)|, \\ |f_2^*(z)| &= |f_2(z)|. \end{aligned}\right\} \quad (|z| = 1)$$

Wenn nun

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1^*(z)| \cdot |f_2^*(z)| \, r \, dr \, d\theta \leqq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f_1^*(e^{i\theta})| \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |f_2^*(e^{i\theta})| \, d\theta,$$

so ist a fortiori (11) erfüllt.

Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ für $|z| < 1$ von Null verschieden, so gibt es solche im Einheitskreise reguläre Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$, daß

$$f_1(z) = \varphi_1(z)^2, \quad f_2(z) = \varphi_2(z)^2.$$

Setzt man

$$\varphi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu,$$

$$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

$$c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \ldots + a_\nu b_0,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\varphi_1(z)\,\varphi_2(z)|^2 \, r \, dr \, d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu\theta}\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_\nu r^\nu e^{-i\nu\theta}\Big) r \, dr \, d\theta \\ &= \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|c_\nu|^2}{\nu+1}, \end{aligned}\right.$$

$$3) \quad \int_0^{2\pi} |f_1(e^{i\theta})| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu\theta} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu r^\nu e^{-i\nu\theta} \, d\theta = 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2,$$

$$(14)\quad \int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\Theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' b_\nu r^\nu e^{i\nu\Theta} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \bar{b}_\nu r^\nu e^{-i\nu\Theta}\,d\theta = 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |b_\nu|^2.$$

Nach einer bekannten Ungleichung haben wir

$$\begin{aligned} |c_\nu|^2 &= |a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \ldots + a_\nu b_0|^2 \\ &\leqq (|a_0|^2 |b_\nu|^2 + |a_1|^2 |b_{\nu-1}|^2 + \ldots + |a_\nu|^2 |b_\nu|^2)(\nu+1). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{|c_\nu|^2}{\nu+1} &\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' (|a_0|^2 \cdot |b_\nu|^2 + |a_1|^2 |b_{\nu-1}|^2 + \ldots + |a_\nu|^2 |b_0|^2) \\ &= \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |a_\nu|^2\Big) \cdot \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' |b_\nu|^2\Big). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (12), (13), (14) ergibt sich hieraus die zu beweisende Ungleichung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_1(z)| \cdot |f_2(z)|\, r\,dr\,d\theta \leqq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(e^{i\Theta})|\,d\theta \int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\Theta})|\,d\theta.$$

Hiermit ist die Ungleichung (1) für nicht ebene Minimalflächen bewiesen.

Damit in der Formel (11) das Gleichheitszeichen gelten soll, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{aligned} &|a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \ldots + a_0 b_\nu|^2 \\ &= [|a_\nu|^2 |b_0|^2 + |a_{\nu-1}|^2 |b_1|^2 + \ldots + |a_0|^2 |b_\nu|^2](\nu+1) \\ &\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Dann müssen alle Glieder in dem Ausdruck

$$a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \ldots + a_0 b_\nu$$

einander gleich sein, d. h.

$$\begin{aligned} &a_1 b_0 = a_0 b_1, \\ &a_2 b_0 = a_1 b_1 = a_0 b_2, \\ &\quad\ldots\ldots\ldots \\ &a_\nu b_0 = a_{\nu-1} b_1 = \ldots = a_0 b_\nu, \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Daraus erhält man, indem man

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0} = q$$

setzt,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 q^n, \\ b_n &= b_0 q^n, \end{aligned}$$

lso

$$\varphi_1(z) = \frac{a_0}{1-qz}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{b_0}{1-qz},$$

$$f_1(z) = \frac{a_0^2}{(1-qz)^2}, \qquad f_2(z) = \frac{b_0^2}{(1-qz)^2}.$$

etzen wir diese Werte von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in (9) bzw. (10) ein, so rgibt sich nach Division der beiden Gleichungen

$$\varphi(z)^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2}.$$

olglich muß $\varphi(z)$ gleich einer Konstanten sein. Das ist aber unmöglich, enn C keine ebene Kurve ist. Dies Resultat, in Verbindung mit der ewöhnlichen isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, ergibt die zweite älfte des am Anfang ausgesprochenen Satzes.

Wir können aber mittels der hier angewandten Methode auch das bene isoperimetrische Problem einfach behandeln. Es sei C eine geschlossene, analytische[4]), sich selbst nicht durchschneidende Kurve von er Länge L, die ein Gebiet D vom Flächeninhalt S umschließt. Bedeutet $\varphi(z)$ eine Funktion, die das Innere des Einheitskreises in der -Ebene ($z = re^{i\Theta}$) auf D konform abbildet, so gelten die Formeln

$$L = \int_0^{2\pi} |\varphi'(z)|\, d\theta,$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\varphi'(z)|^2\, r\, dr\, d\theta.$$

olglich besteht infolge (11) die Relation

$$S \leqq \frac{1}{4\pi} L^2.$$

as Gleichheitszeichen kann nur dann auftreten, wenn

$$\varphi'(z) = \frac{a^2}{(1-qz)^2},$$

o a und q Konstanten sind. In diesem Falle ist aber $\varphi(z)$ eine lineare ebrochene Funktion von z, d. h. C ist ein Kreis.

[4]) Der Beweis läßt sich auch dann durchführen, wenn die Randkurve bloß als ktifizierbar vorausgesetzt wird.

(Eingegangen am 24. September 1920.)

Nachtrag.

Nachdem diese Arbeit zur Veröffentlichung eingereicht war, hat Herr W. Blaschke in einem Brief an Herrn Polya, der ihm meinen Satz mitgeteilt hatte, einen unter gewissen Einschränkungen gültigen sehr kurzen Beweis meines Satzes angedeutet. Wenn man die in der Überlegung von Herrn Blaschke vorkommende konvexe Hülle der gegebenen Raumkurve C durch eine geeignete Kegelfläche ersetzt, so läßt sich dieser Beweis wie folgt darstellen.

Es sei T^* irgendeine Kegelfläche, die C zur Leitlinie hat und deren Spitze auf C liegt. Weil T^* auf eine Ebene abwickelbar ist, so genügt der Flächeninhalt S^* dieser Fläche der Ungleichung

$$S^* \leqq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Wenn nun der Minimalfläche wirklich das Minimum des Flächeninhaltes entspricht, so gilt ferner

$$S \leqq S^*.$$

Folglich ist

$$S \leqq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Damit hier das Gleichheitszeichen gelte, muß T^* mit T zusammenfallen. Hieraus folgt der zweite Teil des Satzes, weil eine Minimalfläche, die zugleich abwickelbar ist, eine ebene Fläche sein muß.

Die Allgemeingültigkeit dieses Beweises wird dadurch eingeschränkt, daß nicht jedes Minimalflächenstück einem Minimum des Flächeninhaltes entspricht[1].

---

[1]) Vgl. H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, S. 234 u. S. 151–167.

(Eingegangen am 4. Dezember 1920.)

Bemerkung zu meinem Beweis des Drehungssatzes für schlichte und konforme Abbildungen.

(Erwiderung auf die Note des Herrn Koebe in der Math. Zeitschrift, 6, 1920, S. 311—313.)

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

Zu der von Herrn Koebe an meiner Abhandlung über den Drehungs-
ıtz[1]) geübten Kritik bemerke ich, daß die Angabe meiner Arbeit, der
rehungssatz sei keine Folge des Verzerrungssatzes, trete vielmehr als
lbständiger Satz neben den Verzerrungssatz, sich auf den ganzen von
ir formulierten Satz, und nicht bloß auf dessen qualitativen Teil bezieht
ıd nicht so zu verstehen ist, als benutze mein Beweis den Verzerrungs-
ıtz nicht — dieser kommt ja gleich auf der nächstfolgenden Seite zur
nwendung. Es sollte durch diese Wendung lediglich auf die Neuheit
er Fragestellung hingewiesen werden, ein Umstand, den auch Herr Koebe
cht bestreitet.

Koebes Angaben über den Beweis des qualitativen Teiles meines
rehungssatzes sind sehr kurz, wegen der Durchführung wird auf eine
ıdere Arbeit verwiesen. Hierdurch wird der Anschein hervorgerufen, als
i der Drehungssatz ein bloßes Korrolar des Verzerrungssatzes. Hätte
h mich in meiner Arbeit auf die Angabe des Grundgedankens beschränken
ollen, so hätte ich die gleiche Kürze erreichen können. Denn es durfte
ei jedem mit dem Gebiet etwas Vertrauten als geläufig angesehen werden,
aß eine Schranke für die zweite Ableitung $f''(z)$ einer schlichten Abbildung
istiert. Daraus folgen Schranken für $f'(z) - 1$ und damit für $\arg f'(z)$.
iese Abschätzung der Änderung von $\arg f'(z)$ beim Übergang zu Nach-
ırpunkten läßt sich durch Koordinatentransformation sofort auf beliebige
ınkte übertragen. Daher liefert Zusammensetzung der Abschätzungen

[1]) Vgl. diese Zeitschrift, 4 (1919), S. 295—305.

eine Abschätzung von $\arg f'(z)$ im ganzen Einheitskreis. Ich kann wirklich nicht finden, daß der Koebesche Weg kürzer sei als dieser. Allerdings rückt Koebes Gang durch bloße Verwendung der ersten Ableitung die Beziehung zum Verzerrungssatz deutlicher in den Vordergrund als meine Anknüpfung an leitende, auch diesem Satz zugrunde liegende Ideen.

Da mir vor allem an der Gewinnung einer möglichst guten Abschätzung lag, so habe ich mich auf den von mir gewählten Weg beschränkt.

Wo allerdings das Schwarzsche Lemma ein besseres Resultat gestattete, da habe ich es, wie auf Seite 303 meiner Arbeit, herangezogen.

Mein Vorgehen hat durch eine kürzlich erschienene Arbeit des Herrn R. Nevanlinna[2]) eine entschiedene Rechtfertigung erfahren. Die drittunterste Formel auf S. 296 meiner Arbeit habe ich ohne Verwendung des Verzerrungssatzes aus meinem Flächensatz gewonnen. Herr Nevanlinna hat gezeigt, daß sich aus dieser Formel durch Übergang zu Polarkoordinaten (r, φ) und nachfolgende Integration nach φ nicht allein mein voller Drehungssatz sehr kurz *ohne* Verwendung des Verzerrungssatzes gewinnen läßt, sondern daß auch auf ebenso einfachem Wege der Verzerrungssatz selbst aus dieser Formel fließt. Meine Vermutung, mein Flächensatz sei die wahre Wurzel aller über den Verlauf schlichter Abbildungen bisher bekannten Tatsachen, hat so eine volle Bestätigung gefunden.

---

[2]) R. Nevanlinna, Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Öfvers. av. Finska Vet. Soc. Förh., 62 (1919/20), Avd A. No. 7.

(Eingegangen am 1. Dezember 1920.)

Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen.

Von

G. Szegő in Berlin.

Einleitung.

Die Lebesgueschen Konstanten

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)x|}{\sin x}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pielen bekanntlich eine wichtige Rolle in der Theorie der Fourierschen Reihen. Sie liefern für einen festen Wert von n die obere Grenze der n-ten Partialsumme der Fourierschen Reihe aller Funktionen, die dem absoluten Betrage nach überall kleiner als 1 sind. Die Definition dieser Konstanten rührt von Lebesgue her. Er hat auch bewiesen, daß

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = \infty$$

t[1]).

Fejér[2]) hat das asymptotische Verhalten dieser Konstanten näher ntersucht und die folgende interessante Formel erhalten:

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + a_0 + \varepsilon_n,$$

o a_0 eine von n unabhängige Konstante und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist; er hat auch ewiesen, daß die ϱ_n *für große* n monoton wachsen und hat die Frage ufgeworfen, ob dies vielleicht nicht von Anfang an der Fall ist.

---

[1]) *Leçons sur les séries trigonométriques* [Paris, Gauthier-Villars 1906], § 45, 86–87.

[2]) *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen* [Journal für die u. a. Mathematik, **138** (1910), S. 22–53].

Gronwall[3]) hat dies in der Tat bewiesen; er hat ferner einen schärferen asymptotischen Ausdruck, als der Fejérsche angegeben[4]), aus welchem hervorgeht, daß die höheren Differenzen der Serie

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots,$$

d. h. die Differenzen, die folgendermaßen definiert sind:

$$\Delta^\nu \varrho_n = \Delta^{\nu-1}\varrho_{n+1} - \Delta^{\nu-1}\varrho_n \qquad (\Delta^0 \varrho_n = \varrho_n),$$

für genügend große n folgende Vorzeichen haben:

$$\operatorname{sgn}(\Delta^\nu \varrho_n) = (-1)^{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Er hat die Frage aufgeworfen, ob dies nicht von Anfang an der Fall wäre[5]).

Der Zweck dieser Note ist, für die Lebesgueschen Konstanten ϱ_n eine neue Darstellung anzugeben, aus welcher nicht nur der Gronwallsche Satz (über das monotone Wachsen der ϱ_n), sondern auch der allgemeinere Satz über das Vorzeichen der höheren Differenzen, — sozusagen ohne Rechnung abzulesen ist. Ich ersetze somit den komplizierten Beweisgang von Herrn Gronwall, mit welchem er die Fejérsche Vermutung feststellte, durch einen wesentlich einfacheren und erhalte gleichzeitig auch die Antwort auf die Gronwallsche Fragestellung.

§ 1.

Ein neuer Ausdruck für die Lebesgueschen Konstanten ϱ_n.

Es gilt, wie man durch einfache Rechnungen beweist, die absolut konvergente Entwicklung

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\theta}{4\nu^2-1}.$$

Daraus folgt für $\theta = 0$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4\nu^2-1},$$

also

$$|\sin\theta| = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2\nu\theta}{4\nu^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin^2\nu\theta}{4\nu^2-1}.$$

---

[3]) *Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen* [Mathematische Annalen, 72 (1912), S. 244–261].

[4]) A. a. O. § 4, S. 256.

[5]) A. a. O. S. 260.

it Hilfe dieser Formel gestaltet sich der Integralausdruck der n-ten ebesgueschen Konstante ϱ_n folgendermaßen:

$$\varrho_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2n+1)\nu\theta}{\sin\theta} d\theta.$$

un folgt aus der bekannten Formel

$$\frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 5x}{\sin x} + \ldots + \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} = \left(\frac{\sin kx}{\sin x}\right)^2,$$

E

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 kx}{\sin x} dx = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1}$$

, also

$$\varrho_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\nu(2n+1)-1}}{4\nu^2-1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d dies ist eben die Formel, welche wir ableiten wollten.

§ 2.

Anwendungen.

Aus der letzten Formel von ϱ_n folgt unmittelbar

$$\Delta_n = \varrho_{n+1} - \varrho_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4n\nu+2\nu+1} + \frac{1}{4n\nu+2\nu+3} + \ldots + \frac{1}{4n\nu+6\nu-1}}{4\nu^2-1} > 0.$$

Es ist also

$$\Delta\varrho_n = \varrho_{n+1} - \varrho_n = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{p_\lambda}{n+q_\lambda},$$

p_λ und q_λ positive, von n unabhängige Größen bezeichnen, auf deren auen Wert es hier nicht ankommt. Nun ist offenbar bei positiven, n unabhängigen Konstanten p und q

$$\operatorname{sgn}\left(\Delta^\nu \frac{p}{n+q}\right) = (-1)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

alle n, also

$$\operatorname{sgn}(\Delta^\nu \varrho_n) = \operatorname{sgn}[\Delta^{\nu-1}(\Delta\varrho_n)] = (-1)^{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

dies ist eben der von Gronwall vermutete Satz.

§ 3.

Bemerkungen.

1. Aus der Formel (R) folgt natürlich ohne Schwierigkeit auch die von Gronwall herrührende semikonvergente Entwicklung für ϱ_n[6]).

2. Man kann auch statt ϱ_n die Konstanten

$$\tau_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin n x|}{\sin x}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

betrachten, welche sich für ungerade n auf die Lebesgueschen Konstanten reduzieren. Dann gestalten sich die Rechnungen des § 2 noch einfacher.

3. Herr Fejér teilte mir mit, daß E. E. Levi noch im Jahre 1910 in einem an ihn gerichteten Briefe auch einen Beweis für das monotone Wachsen der ϱ_n gegeben hat. Der wesentliche Gedanke dieses Beweises war die Einführung einer kontinuierlichen Veränderlichen α statt n und die *Differentiation* der Funktion

$$\varrho(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2\alpha+1)x|}{\sin x}\, dx$$

nach α.

4. Die Folge $\{\Delta\varrho_n\}$ ist *vollmonoton* nach der Bezeichnungsweise von E. Jacobsthal[7]).

Berlin, Juli 1920.

---

[6]) A. a. O. § 4, S. 256, Formel (34). — Ich benutze hier die Gelegenheit auf ein Versehen hinzuweisen, welches in der genannten Formel von Herrn Gronwall vorkommt. Das Glied

$$\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)\frac{1}{2n+1}$$

muß nämlich weggelassen werden! Die Formel (34) lautet somit richtig

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2}\log(2n+1) + A_0 + \sum_{\nu=1}^{p}\frac{A_\nu}{(2n+1)^{2\nu}} + R_{p+1},$$

wo A_ν und R_{p+1} die dortige Bedeutung haben. In der Tat ist a. a. O. die Formel (30), also auch (33), für $\lambda = 0$ nicht gültig; damit sie richtig seien, muß zur rechten Seite $-\frac{1}{2}$ addiert werden. Der Ausdruck von ϱ_n [vgl. (24)] erhält also noch einen Beitrag

$$\frac{16}{\pi^2}\frac{s_2'}{2n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{\pi^2}\frac{s_2'}{2n+1} = \left(\frac{8}{\pi^2}-1\right)\frac{1}{2n+1},$$

so daß das Glied $(2n+1)^{-1}$ wegfällt.

[7]) *Mittelwertbildung und Reihentransformation* [Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), S. 100–117], S. 108.

(Eingegangen am 5. August 1920.)

Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen.

(Fortsetzung[1]).)

Von

G. Szegő in Berlin.

IV. Teil.

Über gewisse Orthogonalsysteme von Polynomen.

Inhalt.

§ 11. Definition.
§ 12. Beziehungen zu der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe.
§ 13. Sätze über Wurzeln.
§ 14. Konvergenzsätze.
§ 15. Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$.
Beispiele.

§ 11.

Definition.

29. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Ich betrachte für $n \geqq 1$ die Determinante

$$D_n(\zeta) = [\zeta c_{p-q} - c_{p-q+1}]_0^{n-1} = D_{n-1}[f(.)(\zeta - e^{i\cdot})] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$D_n(\zeta)$ ist ein Polynom n-ten Grades in ζ mit komplexen Koeffizienten. Ich behaupte den

Satz XXV. *Es ist*

$$\int_0^{2\pi} f(x) \Delta_m(\zeta) \overline{\Delta_n(\zeta)}\, dx = 0 \qquad (\zeta = e^{ix};\ m \gtrless n).$$

---

[1]) Man vgl. Math. Zeitschr., 6 (1920), S. 167—202.

Zu diesem Zwecke berechne ich die Integrale

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,\bar{\zeta}^k\,dx \quad (\zeta = e^{ix};\ k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das geschieht mit Hilfe der folgenden Umformung von $\Delta_n(\zeta)$:

$$(27)\quad \Delta_n(\zeta) = [\zeta c_{p-q} - c_{p-q+1}]_0^{n-1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} & 1 \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} & \zeta \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & \zeta^n \end{vmatrix}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)^2).$$

In der Tat, wenn ich

$$e^{i\theta_k} = z_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

setze, so gilt identisch

$$(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \ldots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \ldots & z_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ z_0^n & z_1^n & \ldots & z_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

also

$$[\zeta z_q^{p-q} - z_q^{p-q+1}]_0^{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & \ldots & z_{n-1}^{-n+1} & 1 \\ z_0 & 1 & \ldots & z_{n-1}^{-n+2} & \zeta \\ z_0^2 & z_1 & \ldots & z_{n-1}^{-n+3} & \zeta^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ z_0^n & z_1^{n-1} & \ldots & z_{n-1} & \zeta^n \end{vmatrix}.$$

Ich multipliziere jetzt mit $f(\theta_0)$, $f(\theta_1)$, ..., $f(\theta_{n-1})$ und integriere nach θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1}. Dann folgt die gewünschte Gleichung.

Daraus erhält man sofort, daß

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,\bar{\zeta}^k\,dx = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} & c_{-k} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} & c_{-k+1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & c_{-k+n} \end{vmatrix} \qquad (\zeta = e^{ix})$$

ist, also

$$J_k^{(n)} = 0 \qquad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

und

$$J_n^{(n)} = D_n(f).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[2]) Vgl. meine Arbeit: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören [Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 218–270].

30. Das Polynom $\Delta_n(\zeta)$ hat offenbar die Form

$$\Delta_n(\zeta) = D_{n-1}(f)\zeta^n + \ldots,$$

so mit Rücksicht auf das letzte Resultat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)|\Delta_n(\zeta)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\Delta_n(\zeta)\overline{\Delta_n(\zeta)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\Delta_n(\zeta)D_{n-1}(f)\bar{\zeta}^n dx = D_{n-1}(f)J_n^{(n)} = D_{n-1}(f)D_n(f)$$
$$(\zeta = e^{ix}).$$

tze ich also

8) $$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{D_0(f)}}, \quad \varphi_n(\zeta) = \frac{\Delta_n(\zeta)}{\sqrt{D_{n-1}(f)D_n(f)}} = \frac{D_{n-1}[f(.)(\zeta - e^{i\cdot})]}{\sqrt{D_{n-1}(f)D_n(f)}}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ist

9) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_m(\zeta)\overline{\varphi_n(\zeta)}\,dx = \varepsilon_{mn} \qquad (\zeta = e^{ix};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Existenz eines solchen Systems von Polynomen ist a priori klar; an muß einfach das Funktionensystem

$$\sqrt{f(x)}, \quad \sqrt{f(x)}\zeta, \quad \ldots, \quad \sqrt{f(x)}\zeta^n, \quad \ldots \qquad (\zeta = e^{ix})$$

ch dem Verfahren von E. Schmidt für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ orthogonalisieren Einleitung). Die Polynome $\varphi_n(\zeta)$ sind dann durch die Forderung (29) ogesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) deutig bestimmt. Wir haben hier diese Polynome durch die Fourier-en Konstanten bzw. durch die Toeplitzschen Determinanten von $f(x)$ sgedrückt.

Die Polynome $\varphi_n(\zeta)$ bezeichne ich als *„die Polynome des zu $f(x)$ örigen Orthogonalsystems"*. Die sind offenbar eindeutig bestimmt, wenn n man sie etwa so normiert, daß der Koeffizient von ζ^n positiv sei. Dann es klar, daß zu $cf(x)$, wo $c > 0$ ist, die Polynome $\frac{1}{\sqrt{c}}\varphi_n(\zeta)$ gehören d zu $f(-x)$ die Polynome $\overline{\varphi}_n(\zeta)$ [3]). Daraus folgt, daß für gerade $f(x)$ [4]) ntliche Koeffizienten der Polynome $\varphi_n(\zeta)$ reell sind.

Ist z. B. $f(x) = 1$, so ist $\varphi_n(\zeta) = \zeta^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

---

[3]) Wenn $F(\zeta)$ eine Potenzreihe ist, so bezeichne ich mit $\overline{F}(\zeta)$ die Potenzreihe $\overline{F}(\bar{\zeta})$, d. h. die Potenzreihe mit den konjugiert komplexen Koeffizienten.

[4]) D. h. $f(-x) = f(x)$.

§ 12.

Beziehungen zu der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe.

31 Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Ich gebe der im § 3 formulierten Aufgabe eine neue Form.

Ich setze, wie dort

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) |P_n(z)|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

für sämtliche Polynome n-ten Grades $P_n(z)$, die der Bedingung $P_n(\alpha) = 1$ genügen; α soll hier beliebig sein.

Es sei nun

$$P_n(z) = x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \ldots + x_n \varphi_n(z)^{5}),$$

wo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ komplexe Zahlen bezeichnen und

$$x_0 \varphi_0(\alpha) + x_1 \varphi_1(\alpha) + \ldots + x_n \varphi_n(\alpha) = 1$$

ist. Man hat aber

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) |P_n(z)|^2 d\theta = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \qquad (z = e^{i\theta})$$

und nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$1 = \Big| \sum_{k=0}^{n} x_k \varphi_k(\alpha) \Big|^2 \leqq \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\alpha)|^2,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für

$$x_k = \lambda \overline{\varphi_k(\alpha)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

gültig ist; λ wird hier durch die Bedingung

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\alpha)} \varphi_k(\alpha) = \lambda \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\alpha)|^2 = 1$$

bestimmt[6]). Daraus folgt der

Satz XXVI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ, (L) integrabel und $A(f) > 0$; dann hat man*

$$\frac{1}{\mu_n(\alpha; f)} = |\varphi_0(\alpha)|^2 + |\varphi_1(\alpha)|^2 + \ldots + |\varphi_n(\alpha)|^2.$$

---

[5]) Das ist immer möglich, da der höchste Koeffizient von $\overline{\varphi_n(z)}$ positiv ist.

[6]) Man vgl. Abschnitt 11.

s Minimum $\mu_n(\alpha; f)$ der obigen Aufgabe wird nur für das Polynom

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)[\overline{\varphi_0(\alpha)}\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\varphi_n(z)]$$
$$= \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)$$

eicht.

32. Die Polynome

$$s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\varphi_n(z)$$

elen im folgenden eine ausgezeichnete Rolle. Es gilt zunächst der

Satz XXVII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ, (L) integrabel und $A(f) > 0$.*
nn ist für $\alpha \neq 0$

$$|\alpha|^{2n}\mu_n(\alpha; f) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right);$$

gilt ferner die Funktionalgleichung

$$s_n(\alpha, z) = (\bar{\alpha}z)^n s_n\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist z. B. $f(\theta) = 1$, so ist

$$s_n(\alpha, z) = \frac{1 - (\bar{\alpha}z)^{n+1}}{1 - \bar{\alpha}z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man hat

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|P_n(z)|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

hrend $P_n(\alpha) = 1$ ist. Ich setze hier

$$P_n(z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \overline{Q}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

o

$$Q_n(z) = (\bar{\alpha}z)^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$Q_n(z)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades bezeichnet. Dann ist

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|\overline{Q}_n(\bar{z})|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

$$= \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|Q_n(z)|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

hrend $\overline{Q}_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$, d. h. $Q_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) = 1$ ist. Also

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{1}{|\alpha|^{2n}}\mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right), \qquad \text{q. e. d.}$$

Das Minimum wird hier nur für

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z),$$

bzw. für

$$Q_n(z) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) s_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}, z\right)$$

erreicht; also

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \bar{Q}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nun ist

$$s_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}, z\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)}\, \varphi_k(z),$$

so daß

$$\bar{Q}_n(z) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) \sum_{k=0}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \bar{\varphi}_k(z)$$

$$= \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\bar{z})}\, \varphi_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) s_n\left(\bar{z}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$$

ist; daraus folgt

$$\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right),$$

d. h.

$$s_n(\alpha, z) = (\bar{\alpha} z)^n\, s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right), \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 13.

Sätze über Wurzeln.

33. In § 3 habe ich gezeigt, daß für $|\alpha| < 1$ das Polynom

$$\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \mu_n(\alpha; f) \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\alpha)}\, \varphi_k(z),$$

welches die Lösung der dort gestellten Minimum-Aufgabe liefert, im Innern des Einheitskreises keine Wurzeln haben kann. Diese Tatsache wird verschärft durch den

Satz XXVIII. *Das Polynom n-ten Grades in z*

$$s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\, \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\, \varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\, \varphi_n(z)$$

hat für $|\alpha| < 1$ alle seine Wurzeln außerhalb des Einheitskreises, für $|\alpha| = 1$ am Rande des Einheitskreises und für $|\alpha| > 1$ im Innern des Einheitskreises.

Es sei nämlich z_0 eine Wurzel von $s_n(\alpha, z)$. (Offenbar ist $z_0 \neq \alpha$.) Ich setze

$$F(\theta) = \left|\frac{s_n(\alpha, z)}{z - z_0}\right|^2 f(\theta) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

ann ist für sämtliche Polynome erster Ordnung $P_1(z)$, welche die Bedingung $P_1(\alpha) = 1$ erfüllen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left|P_1(z)\frac{s_n(\alpha, z)}{z-z_0}\right|^2 d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left|\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\frac{s_n(\alpha, z)}{z-z_0}\right|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,|P_1(z)|^2\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\left|\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

etze ich also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,e^{in\theta}\,d\theta = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\ ^{7}),$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{C_0}}, \qquad \Phi_1(z) = \frac{C_0 z - C_1}{\sqrt{C_0(C_0^2 - |C_1|^2)}}$$

$C_0 > |C_1|$) und

$$S_1(\alpha, z) = \overline{\Phi_0(\alpha)}\,\Phi_0(z) + \overline{\Phi_1(\alpha)}\,\Phi_1(z),$$

ann ist mit Rücksicht auf (28) und auf Satz XXVI

$$S_1(\alpha, z) = \text{const}\,(z - z_0),$$

so

$$S_1(\alpha, z_0) = \overline{\Phi_0(\alpha)}\,\Phi_0(z_0) + \overline{\Phi_1(\alpha)}\,\Phi_1(z_0) = 0.$$

. h.

$$\frac{1}{C_0} + \frac{(C_0\bar{\alpha} - \bar{C}_1)(C_0 z_0 - C_1)}{C_0(C_0^2 - |C_1|^2)} = 0.$$

araus folgt

$$z_0 = \frac{C_1\bar{\alpha} - C_0}{C_0\bar{\alpha} - \bar{C}_1}.$$

un ist bekanntlich

$$\left|\frac{x\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} - \bar{x}}\right| \gtrless 1 \qquad (|x| < 1),$$

nachdem

$$|\alpha| \lessgtr 1$$

t. Damit ist die Behauptung bewiesen.

34. Ich setze jetzt

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}}\,\varphi_n(z) = z^n + \cdots$$

nd

$$\psi_n^*(z) = z^n\,\overline{\psi}_n\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

7) $C_0 = A(F)$ ist positiv.

Dann ist $\psi_n^*(0) = 1$ und

$$|\psi_n^*(z)| = |\psi_n(z)| \qquad (|z| = 1),$$

also

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \mu_n(0; f) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

d. h. nach Satz XXVI

$$(33) \qquad \psi_n^*(z) = \mu_n(0; f)\,s_n(0, z) = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(0)}\,\varphi_k(z)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)\ ^{8}).$$

Daraus folgt nach Satz XXVIII, daß sämtliche Wurzeln des Polynoms $\psi_n^*(z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen. Es gilt also der

Satz XXIX. *Das Polynom $\varphi_n(z)$ hat alle seine Wurzeln im Innern des Einheitskreises.*

35. Als Anwendung der vorigen behandle ich folgende Frage:

Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$ und θ_0 eine feste Zahl im Intervalle $(0, 2\pi)$. Welches ist das Maximum von $\varphi(\theta_0)$ für sämtliche nichtnegative trigonometrische Polynome n-ter Ordnung $\varphi(\theta)$, welche die Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta = 1$$

erfüllen?

Lösung. *Das gesuchte Maximum ist*

$$\frac{1}{\mu_n(e^{i\theta_0}; f)} = \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2.$$

Dies wird erreicht für das einzige trigonometrische Polynom

$$\varphi(\theta) = \mu_n(e^{i\theta_0}; f)\,|s_n(e^{i\theta_0}, z)|^2$$

$$= \mu_n(e^{i\theta_0}; f)\left|\sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(e^{i\theta_0})}\,\varphi_k(z)\right|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

welches n reelle zweifache Nullstellen besitzt[9]).

[8]) Diese Gleichung folgt auch aus Satz XXVII für $\lim \alpha = 0$.

[9]) Man vgl. L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **146** (1915), S. 53–82] S. 64–66. Hier ist $f(\theta) = 1$, $\varphi_n(z) = z^n$ und $\varphi(\theta) \leq n + 1$. — In meiner Arbeit „Über trigonometrische und harmonische Polynome“ [Mathematische Annalen, **79** (1919), S. 323–339] habe ich diese Aufgabe für

$$f(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad (0 \leq r < 1)$$

behandelt. Dann ist

$$\varphi_0(z) = 1, \qquad \varphi_n(z) = \frac{z^{n-1}(z - r)}{\sqrt{1 - r^2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Jedes Polynom n-ten Grades ist nämlich in folgender Form zu hreiben:

$$x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+\ldots+x_n\varphi_n(z).$$

ach einem Satze von Fejér[10]) kann man also

$$\varphi(\theta)=|x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+\ldots+x_n\varphi_n(z)|^2 \qquad (z=e^{i\theta})$$

tzen; ferner ist die obige Normierung von $\varphi(\theta)$ damit äquivalent, daß

$$|x_0|^2+|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2=1$$

. Also

$$\varphi(\theta_0)\leqq\sum_{k=0}^{n}|x_k|^2\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2=\frac{1}{\mu_n(e^{i\theta_0};f)}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Dieses Maximum wird dann und nur dann erreicht, wenn

$$x_k=\overline{\lambda\varphi_k(e^{i\theta_0})} \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

, wo λ der Bedingung

$$|\lambda|^2\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2=1$$

terworfen ist. Also ist

$$|\lambda|^2=\mu_n(e^{i\theta_0};f),$$

h.

$$\varphi(\theta)=\mu_n(e^{i\theta_0};f)\,|s_n(e^{i\theta_0},z)|^2 \qquad (z=e^{i\theta}).$$

s Satz XXVIII folgt, daß sämtliche Wurzeln des Polynoms $s_n(e^{i\theta_0},z)$ Rande des Einheitskreises liegen.

§ 14.

Konvergenzsätze.

36. Ich will in diesem Paragraphen einige Anwendungen der vorigen ze zusammenstellen. Zunächst folgt aus Satz XII und Satz XXVI der

Satz XXX. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f)>0$. $G(f)>0$, so konvergiert die Reihe*

$$|\varphi_0(z)|^2+|\varphi_1(z)|^2+\ldots+|\varphi_n(z)|^2+\ldots$$

$|z|<1$; *ihre Summe ist gleich*

$$\frac{1}{1-|z|^2}\frac{1}{G(z;f)}=\frac{1}{1-|z|^2}\frac{1}{|D(z)|^2}$$ [11]).

$G(f)=0$, so ist diese Reihe für $|z|<1$ divergent[12]).

---

[10]) A. a. O. [9]) S. 62–64.

[11]) Über die Bezeichnungen vgl. Abschnitt 3.

[12]) Sie ist sogar für jedes z divergent. S. Abschnitt 38.

Daraus folgt: *Ist* $G(f) > 0$, *so ist*

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0 \qquad (|z| < 1),$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$.

Beispiel. Es sei E eine Teilmenge des Intervalls $(0, 2\pi)$, deren Lebesguesches Maß $< 2\pi$ ist. Ferner sei $f(\theta)$ nichtnegativ und

$$\int_E f(\theta) d\theta > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)},\ \sqrt{f(\theta)}\, z,\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\, z^n,\ \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$\sqrt{f(\theta)}\, \varphi_0(z),\ \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_1(z),\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_n(z),\ \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom n-ten Grades in z.

b) Der Koeffizient von z^n in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{2\pi} \int_E f(\theta) \varphi_m(z) \overline{\varphi_n(z)} d\theta = \varepsilon_{mn} \qquad (z = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

Dann ist die Reihe

$$|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 + \ldots$$

für $|z| < 1$[13]) divergent.

Wenn ich nämlich $f^*(\theta)$ auf folgende Weise definiere:

$$f^*(\theta) = f(\theta) \quad \text{auf der Menge } E,$$

$$f^*(\theta) = 0 \quad \text{anderswo},$$

so ist $$G(f^*) = 0.$$

Besonders bemerkenswert ist der Fall $f(\theta) = 1$.

37. Es gilt nun folgende Erweiterung des soeben bewiesenen Satzes:

Satz XXXI. *Ist* $f(\theta)$ *nichtnegativ und* (L) *integrabel, ferner* $G(f) > 0$, *so konvergiert die Reihe*

$$\lim_{n=\infty} s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\, \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\, \varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\, \varphi_n(z) + \ldots$$

für $|\alpha| < 1$, $|z| < 1$ *und zwar gleichmäßig für* $|\alpha|$ *und* $|z| \leqq r < 1$; *ihre Summe ist gleich*

$$\frac{1}{1 - \bar{\alpha} z} \frac{1}{\overline{D(\alpha)}} \frac{1}{D(z)}.$$

[13]) Sogar für jedes z.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf Satz V. Zunächst ist es klar aß obige Reihe für $|\alpha| < 1$, $|z| < 1$ konvergiert. Die Funktion

$$E_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)\, D(z) = e_0^{(n)} + e_1^{(n)} z + \ldots + e_k^{(n)} z^k + \ldots$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

t für $|z| < 1$ regulär analytisch, von 0 verschieden und

$$E_n(\alpha) = D(\alpha) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

s ist ferner

$$\lim_{n=\infty} E_n(z) = E(z) = e_0 + e_1 z + \ldots + e_k z^k + \ldots$$

ır jedes $|z| < 1$, und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$. Also

$$\lim_{n=\infty} e_k^{(n)} = e_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich setze jetzt

$$f_n(\theta) = |\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)|^2 f(\theta) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

ann hat man

$$A(f_n) = \mu_n(\alpha; f)$$

nd $G(f_n) > 0$. Nun ist $s_n(\alpha, z) \neq 0$ für $|\alpha| < 1$, $|z| \leqq 1$, also nach atz VII

$$G(z; f_n) = |E_n(z)|^2 \cdot (|z| < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

araus folgt nach Satz V

$$|e_0^{(n)}|^2 + |e_1^{(n)}|^2 + \ldots + |e_k^{(n)}|^2 + \ldots \leqq A(f_n) = \mu_n(\alpha; f),$$

so

$$|e_0|^2 + |e_1|^2 + \ldots + |e_k|^2 + \ldots \leqq \lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = (1 - |\alpha|^2)|D(\alpha)|^2.$$

Man hat aber andererseits

$$E(\alpha) = \lim_{n=\infty} E_n(\alpha) = D(\alpha),$$

so

$$D(\alpha)^2 = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} e_k \alpha^k\Big|^2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \leqq \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \leqq |D(\alpha)|^2,$$

h.

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} e_k \alpha^k\Big|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2.$$

araus folgt

$$e_k = \lambda \bar{\alpha}^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

nd also

$$E(z) = \frac{\lambda}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

Die Konstante λ läßt sich aus der Bedingung $E(\alpha) = D(\alpha)$ berechnen. Es ist

$$\lambda = (1 - |\alpha|^2) D(\alpha),$$

also

$$E(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - \bar{\alpha} z} D(\alpha).$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} s_n(\alpha, z) = \frac{E(z)}{\mu(\alpha; f) D(z)} = \frac{1}{1 - \bar{\alpha} z} \frac{1}{\overline{D(\alpha)}} \frac{1}{D(z)}, \qquad \text{q. e. d.}$$

38. Ich will jetzt das Verhalten der Polynome $\varphi_n(z)$ bzw. $s_n(\alpha, z)$ für $|\alpha| \geqq 1$, $|z| \geqq 1$ studieren. Zunächst gilt der

Satz XXXII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $G(f) > 0$. Man hat für $|z| > 1$*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{\overline{D}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq R > 1$.

In der Tat ergibt sich aus (33)

$$\lim_{n=\infty} \psi_n^*(z) = \frac{G(f)}{\overline{D(0)} D(z)} = \frac{D(0)}{D(z)} \qquad (|z| < 1),$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{\overline{\varphi}_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D(0)} \lim_{n=\infty} \frac{\overline{\varphi}_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D(0)} \lim_{n=\infty} \psi_n^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{D\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|z| > 1),$$

woraus der Satz folgt. Dieser Satz gibt eine asymptotische Abschätzung der orthogonalen Polynome $\varphi_n(z)$ außerhalb des Einheitskreises.

Zur asymptotischen Abschätzung der Polynome $s_n(\alpha, z)$ gebrauche ich den Satz XXVII. Man hat

$$s_n(\alpha, z) = (\bar{\alpha} z)^n s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right).$$

Ist also $G(f) > 0$, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\alpha, z)}{(\bar{\alpha} z)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\bar{\alpha} z}} \frac{1}{D\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)} \frac{1}{\overline{D}\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|\alpha| > 1, |z| > 1).$$

Ist ferner $G(f) = 0$, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(z, z)}{|z|^{2n}} = \infty \qquad (|z| > 1).$$

Es gilt somit der

Satz XXXIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel. Ist $G(f) > 0$, so hat man*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\overline{\varphi_0(\alpha)} \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)} \varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)} \varphi_n(z)}{(\bar{\alpha} z)^n}$$

$$= \frac{\bar{\alpha} z}{\bar{\alpha} z - 1} \frac{1}{D\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)} \frac{1}{\overline{D}\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|\alpha| > 1, |z| > 1).$$

st $G(f) = 0$, *dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2}{|z|^{2n}} = \infty \qquad (|z| > 1).$$

Daraus folgt die Divergenz der Reihe

$$|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 + \ldots$$

ir $|z| > 1$. Ich beweise hier, daß sie auch für $|z| = 1$ divergiert. Wäre ämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(e^{i\theta_0})|^2 = A$$

ıdlich, so wäre nach Abschnitt 35

$$\varphi(\theta_0) \leqq A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi(\theta)d(\theta)$$

ır jedes nichtnegative trigonometrische Polynom $\varphi(\theta)$, also aus Stetigeitsgründen auch für jede nichtnegative stetige Funktion $\varphi(\theta)$. Ich tze hier

$$\varphi(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2} \qquad (0 \leqq r < 1).$$

ann wäre also

$$\frac{1+r}{1-r} \leqq A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2} d\theta$$

$$\leqq \frac{A}{\varepsilon} + \frac{A}{2\pi} \frac{1+r}{1-r} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta,$$

o $\varepsilon > 0$ beliebig ist. Ich setze $\varepsilon = \sqrt{1-r}$, dann ist

$$1 < 1 + r \leqq A\sqrt{1-r} + \frac{A}{\pi} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta.$$

ies führt aber zum Widerspruch, da ja

$$\lim_{\varepsilon = +0} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta = 0$$

. Daraus ergibt sich die Behauptung[14]).

[14]) Es gilt also folgende Ergänzung zu Satz XII: *Ist* $|\alpha| \geq 1$, *dann hat man*

$$\lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) = 0.$$

r beschränkte $f(\theta)$ war dies bereits durch (9′) bekannt.

§ 15.

Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$.

39. Ich stelle die folgende Frage:

Es sei $F(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär; welches ist das Polynom n-ten Grades $P_n(z)$, für welches das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-P_n(z)|^2\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

das kleinste ist; $f(\theta)$ bezeichnet hier eine nichtnegative, (L) integrable Funktion, für welche $A(f)>0$ ist.

Ich setze

$$g_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)F(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta};\ k=0,1,2,\ldots),$$

dann ist das gesuchte Polynom

$$P_n(z)=g_0\varphi_0(z)+g_1\varphi_1(z)+\ldots+g_n\varphi_n(z). \tag{34}$$

In der Tat, wenn ich allgemein

$$P_n(z)=x_0\varphi_0(z)+x_1\varphi_1(z)+\ldots+x_n\varphi_n(z)$$

setze, dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-P_n(z)|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\,d\theta-2\,\Re\sum_{k=0}^{n} g_k\bar{x}_k+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}|x_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\,d\theta-\sum_{k=0}^{n}|g_k|^2+\sum_{k=0}^{n}|g_k-x_k|^2 \qquad (z=e^{i\theta});$$

das Minimum tritt also dann ein, wenn $x_k=g_k$ ist, q. e. d.[15]).

Dieses Minimum ist gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\,d\theta-\sum_{k=0}^{n}|g_k|^2 \qquad (z=e^{i\theta}).$$

---

[15]) $F(z)$ kann hier natürlich durch eine komplexe Funktion $H(\theta)$ der reellen Variablen θ ersetzt werden, für welche das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\,d\theta$$

endlich ist.

Ist z. B. $f(\theta)=1$, so ist $\varphi_n(z)=z^n$ und die Polynome $P_n(z)$ sind e Partialsummen der zu $F(z)$ gehörigen Taylorschen Entwickelung. es ist eine wohlbekannte Tatsache.

40. Es gehört zu jeder im Bereiche $|z|\leqq 1$ regulären Funktion $F(z)$ e formelle Entwickelung

5) $$F(z)\sim g_0\varphi_0(z)+g_1\varphi_1(z)+\ldots+g_n\varphi_n(z)+\ldots,$$

6) $$g_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,F(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta \quad (z=e^{i\theta};\ n=0,1,2,\ldots)$$

. Die n-te Partialsumme $S_n(z)$ dieser Entwickelung läßt sich in der orm schreiben

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,F(\zeta)\,s_n(\zeta,z)\,dx \qquad (\zeta=e^{ix};\ n=0,1,2,\ldots),$$

o $s_n(\zeta,z)$ die im Abschnitte 32 definierten Polynome bezeichnen.

Ich beweise den

Satz XXXIV. *Es gilt für jede im Bereiche* $|z|\leqq 1$ *reguläre unktion* $F(z)$ *die Gleichung*

$$|g_0|^2+|g_1|^2+\ldots+|g_n|^2+\ldots=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\,d\theta \quad (z=e^{i\theta}).$$

Dieser Satz sagt *in gewissem Sinne*[16]) die Vollständigkeit des thogonalsystems

$$\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_0(z),\quad \sqrt{f(\theta)}\,\varphi_1(z),\ldots,\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_n(z),\ldots \qquad (z=e^{i\theta})$$

s. Er folgt also unmittelbar aus jener Tatsache, daß für geeignet gehlte Polynome $P_n(z)$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-P_n(z)|^2\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

liebig klein ist.

Der Satz XXXIV ist auf folgende Weise zu verallgemeinern:

Es seien $F_k(z)$ *regulär für* $|z|\leqq 1$ *und*

$$F_k(z)\sim g_0^{(k)}\varphi_0(z)+g_1^{(k)}\varphi_1(z)+\ldots+g_n^{(k)}\varphi_n(z)+\ldots \quad (k=1,2);$$

[16]) Man vgl. Satz XXXV.

dann ist

$$g_0^{(1)}\overline{g_0^{(2)}} + g_1^{(1)}\overline{g_1^{(2)}} + \ldots + g_n^{(1)}\overline{g_n^{(2)}} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, F_1(z)\overline{F_2(z)}\, d\theta$$

$$(z = e^{i\theta}).$$

41. Es gilt nun das folgende allgemeinere Theorem:

Satz XXXV. *Es sei $H(\theta)$ irgendeine komplexe Funktion der reellen Variablen θ und $f(\theta)|H(\theta)|^2$ (L) integrabel. Ich setze*

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, H(\theta)\overline{\varphi_n(z)}\, d\theta \quad (z = e^{i\theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann ist

$$h = |h_0|^2 + |h_1|^2 + \ldots + |h_n|^2 + \ldots \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\, d\theta.$$

Es gilt ferner für jede im Bereiche $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion $F(z)$ die Ungleichung

$$(37)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - H(\theta)|^2\, d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\, d\theta - h \quad (z = e^{i\theta}),$$

deren rechte Seite nicht durch eine größere ersetzt werden kann.

Der erste Teil unserer Behauptung ist eine direkte Folge der bekannten Besselschen Ungleichung. Der zweite Teil folgt aus Abschnitt 39.

Bevor ich weitergehe, will ich folgende Bemerkung machen:

Es sei $F(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion, für welche in (37) die Gleichheit besteht[17]*). Dann ist*

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, F(z)\overline{\varphi_n(z)}\, d\theta = h_n \quad (z = e^{i\theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d. h. sämtliche Koeffizienten der Entwickelung von $F(z) - H(\theta)$ nach den Polynomen $\varphi_n(z)$ verschwinden, obwohl im allgemeinen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - H(\theta)|^2\, d\theta > 0 \qquad (z = e^{i\theta})$$

ist.

---

[17]) Eine solche Funktion $F(z)$ muß natürlich nicht unbedingt existieren. Ich werde unten ein Beispiel angeben, in welchem sie wirklich existiert.

Dann ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)-P_n(z)|^2\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)|^2\,d\theta$$

$$(z=e^{i\theta})$$

jedes Polynom $P_n(z)$ und das Gleichheitszeichen gilt, wenn $P_n(z)=0$
Andererseits tritt dies nur für

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(g_k-h_k)\,\varphi_k(z)$$

. Also ist $g_k=h_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$, q. e. d.

Beispiel. Es sei $f(\theta)>0$ und $\frac{1}{f(\theta)}$ auch (L) integrabel[18]). Ferner $|\alpha|<1$. Ich setze

$$\overline{H(\theta)}=\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{z}{z-\alpha}=\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{1}{1-\alpha\bar{z}} \qquad (z=e^{i\theta}).$$

nn ist

$$\bar{h}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\overline{H(\theta)}\,\varphi_n(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{z-\alpha}\,\varphi_n(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\varphi_n(z)}{z-\alpha}\,dz$$

$$(z=e^{i\theta}),$$

das Integral im Cauchyschen Sinne zu nehmen ist. Also

$$\bar{h}_n=\varphi_n(\alpha) \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

aus z. B. von neuem die Konvergenz der Reihe

$$h=|\varphi_0(\alpha)|^2+|\varphi_1(\alpha)|^2+\ldots+|\varphi_n(\alpha)|^2+\ldots$$

t (Vgl. Satz XXX). Man hat hier

$$h=\frac{1}{\mu(\alpha;f)}=\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,\frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z=e^{i\theta}),$$

ist für jede im Bereiche $|z|\leqq 1$ reguläre $F(z)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)|^2\,d\theta\geqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha}z|^2}-\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,\frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$

$$(z=e^{i\theta}).$$

---

[18]) Dann ist notwendigerweise $G(f)>0$, da ja $G(f)\,G\left(\frac{1}{f}\right)=1$ ist.

Es sei jetzt $D(z)$ regulär und von 0 verschieden für $|z| \leqq 1$, so ist in der letzten Ungleichung für

$$F(z) = \frac{1}{1-\bar{\alpha}z} \frac{1}{\overline{D(\alpha)}} \frac{1}{D(z)}$$

das Gleichheitszeichen gültig. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|F(z)|^2 d\theta = \frac{1}{|D(\alpha)|^2} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2} \frac{1}{|D(\alpha)|^2} \quad (z=e^{i\theta})$$

und

$$\Re \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{H(\theta)}F(z)d\theta = \Re \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{F(z)}{z-\alpha}dz = \Re F(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2} \frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$

$$(z = e^{i\theta}).$$

Daraus folgt, daß die Entwickelungskoeffizienten der Funktion

$$\frac{1}{1-\bar{\alpha}z} \frac{1}{\overline{D(\alpha)}} \frac{1}{D(z)} - \frac{1}{|D(z)|^2} \frac{1}{1-\bar{\alpha}z} = \frac{1}{1-\bar{\alpha}z} \frac{1}{D(z)} \left(\frac{1}{\overline{D(\alpha)}} - \frac{1}{\overline{D(z)}}\right)$$

$$(z = e^{i\theta})$$

nach dem Polynomen $\varphi_n(z)$ sämtlich verschwinden.

42. Zum Schluß beweise ich den

Satz XXXVI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $G(f) > 0$. Ferner sei $F(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und ihre Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$*

$$F(z) \sim g_0\varphi_0(z) + g_1\varphi_1(z) + \ldots + g_n\varphi_n(z) + \ldots, \tag{35}$$

wo

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)F(z)\overline{\varphi_n(z)}d\theta \quad (z=e^{i\theta};\ n=0,1,2,\ldots) \tag{36}$$

ist. Dann konvergiert diese Entwickelung für $|z| < R$ und stellt $F(z)$ dar, sie divergiert ferner für $|z| > R$, wo $R > 1$ den Radius des größten Kreises um den Nullpunkt bezeichnet, welcher in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält. Man hat übrigens

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} = \frac{1}{R}.$$

Ich betrachte zunächst ganz allgemein eine Entwickelung

$$\gamma_0\varphi_0(z) + \gamma_1\varphi_1(z) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(z) + \ldots,$$

für welche

$$|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \ldots + |\gamma_n|^2 + \ldots$$

nvergiert. Es sei

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|\gamma_n|} = \gamma,$$

nn behaupte ich, daß diese Entwickelung für $|z| < \frac{1}{\gamma}$ konvergiert und r $|z| > \frac{1}{\gamma}$ divergiert. In dem Bereiche $|z| < \frac{1}{\gamma}$ stellt sie eine reguläre nktion dar.

Es ist offenbar $\gamma \leqq 1$. Ist $\gamma = 1$, so folgt die Behauptung unmittelr aus den Sätzen XXX und XXXII. Ist $\gamma < 1$, dann folgt die Diverız für $|z| > \frac{1}{\gamma}$ aus Satz XXXII. Aus demselben Satze folgt die Konrgenz für $1 < |z| < \frac{1}{\gamma}$, also nach einem wohlbekannten Satz von eierstraß überhaupt für $|z| < \frac{1}{\gamma}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ich betrachte nun die zu $F(z)$ gehörige Entwickelung

$$g_0 \varphi_0(z) + g_1 \varphi_1(z) + \ldots + g_n \varphi_n(z) + \ldots,$$

welche nach Satz XXXIV

$$|g_0|^2 + |g_1|^2 + \ldots + |g_n|^2 + \ldots$$

nvergiert. Es sei

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} = g,$$

nn muß nur bewiesen werden, daß $\frac{1}{g} = R$ ist, wo R den Radius des ßten Kreises um den Nullpunkt bezeichnet, welcher in seinem Innern nen singulären Punkt von $F(z)$ enthält.

Zunächst folgt aus dem eben Bewiesenen, daß die letzte Entwicklung $|z| < \frac{1}{g}$ konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt. Daraus gt die Ungleichung

$$\frac{1}{g} \leqq R.$$

der Tat, dies ist klar für $g = 1$. Ist aber $g < 1$, d. h. $\frac{1}{g} > 1$, so muß durch die Entwickelung für $|z| < \frac{1}{g}$ dargestellte Funktion nach Satz XXXIV $F(z)$ übereinstimmen, so daß $F(z)$ für $|z| < \frac{1}{g}$ regulär ist, also $\leqq R$.

Die Behauptung wird somit bewiesen, sobald ich die Ungleichheit

$$\frac{1}{g} \geqq R, \quad \text{d. h.} \quad g \leqq \frac{1}{R}$$

nachweise. Dies geschieht folgendermaßen. Es ist nach der Orthogonalitätseigenschaft der $\varphi_n(z)$

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,(F(z)-Q(z))\,\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta}),$$

wo $Q(z)$ ein *beliebiges* Polynom $n-1$-ten Grades bezeichnet. Nun gibt es nach der Bedeutung von R zu jedem $R' < R$ für alle n solche Polynome $n-1$-ten Grades $Q(z)$, daß

$$|F(z)-Q(z)| < \frac{A}{R'^n} \qquad (|z| \leqq 1)$$

ist, wo A von z und n unabhängig ist. D. h.

$$|g_n| < \frac{A}{R'^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\varphi_n(z)|\,d\theta \leqq \frac{A}{R'^n}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta} \qquad (z=e^{i\theta}),$$

also

$$g = \limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} \leqq \frac{1}{R'},$$

und da R' beliebig nahe zu R gewählt werden kann,

$$g \leqq \frac{1}{R},$$

w. z. b. w. Damit ist unser Satz XXXVI völlig bewiesen.

Korollar. Ist in Satz XXXI die Funktion $D(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär, so gilt die dort ausgesprochene Gleichung

$$\overline{\varphi_0(\alpha)}\,\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\,\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\,\varphi_n(z) + \ldots = \frac{1}{1-\bar{\alpha}z}\,\frac{1}{\overline{D(\alpha)}}\,\frac{1}{D(z)}$$
$$(|\alpha| < 1)$$

nicht nur für $|z| < 1$, sondern sogar für $|z| < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|\alpha|}, R\right)$, angenommen, daß $D(z)$ für $|z| < R$ regulär und von 0 verschieden ist.

Beispiele.

43. Es sei

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

wo $\varphi(\theta)$ ein positiv trigonometrisches Polynom p-ter Ordnung bezeichnet. Ferner sei

$$a(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p \qquad (a_p \neq 0)$$

für $|z| < 1$ von 0 verschieden und

$$\varphi(\theta) = |a(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

ann ist nach Satz XVI

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = G(f) = \frac{1}{G(\varphi)} = \frac{1}{|a_0|^2} \qquad (n \geqq p).$$

Man hat nun nach Abschnitt 34

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \frac{1}{|a_0|^2} \quad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p)$$

d

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = G(f)\,|\psi_n^*(0)|^2 = G(f) = \frac{1}{|a_0|^2} \quad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p),$$

h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta} \qquad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p);$$

er ist nach Satz VI

$$f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2 = \left|\frac{\psi_n^*(z)}{a(z)}\right|^2 = \text{const} \qquad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p),$$

raus[19])

$$\psi_n^*(z) = \text{const}\, a(z)$$

gt. Aus $\psi_n^*(0) = 1$ ergibt sich

$$\psi_n^*(z) = \frac{a(z)}{a_0} \qquad (n \geqq p).$$

Daraus folgt

$$\psi_n(z) = z^n\,\overline{\psi}_n^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^n\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{a}_0}$$

d also

$$\varphi_n(z) = \frac{|a_0|}{\bar{a}_0}\,z^n\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n-p}\,b(z) \qquad (n \geqq p),$$

$$b(z) = \frac{|a_0|}{\bar{a}_0}\,z^p\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Polynom p-ten Grades bezeichnet[20]).

44. Es sei

$$f(\theta) = \frac{1}{2}|z - z_0|^2 = \frac{1 + r_0^2}{2} - r_0\cos(\theta - \theta_0)$$

$$(z = e^{i\theta};\ z_0 = r_0 e^{i\theta_0};\ 0 \leqq r_0 < 1).$$

---

[19]) S. Erste Mitteilung Fußnote [26]).

[20]) Man vgl. a. a. O. [9]).

Dann ist

$$D_n(f) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - r_0^{2n+4}}{1 - r_0^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)^{21}).$$

Die Eigenwerte von $f(\theta)$ ergeben sich durch eine elementare Rechnung; man hat

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1 + r_0^2}{2} - r_0 \cos\frac{(k+1)\pi}{n+2} = f\left(\frac{(k+1)\pi}{n+2} + \theta_0\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)^{22}).$$

Die Polynome $\varphi_n(z)$ lassen sich auf folgende Weise berechnen. Aus (27) folgt, wenn man die rechtsstehende Determinante nach ihrer letzten Zeile entwickelt,

$$\Delta_n(z) = D_{n-1}(f) z^n - c_1 \Delta_{n-1}(z) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

also

$$\Delta_n(z) = D_{n-1}(f) z^n - c_1 D_{n-2}(f) z^{n-1} + \ldots + (-c_1)^{n-1} D_0(f) z + (-c_1)^n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus erhält man leicht die Polynome $\varphi_n(z)$.

Ich betrachte jetzt den interessanten Fall $r_0 = 1$. Dann gestalten sich diese Rechnungen sehr einfach. Man hat

$$f(\theta) = 1 - \cos(\theta - \theta_0)$$

und

$$D_n(f) = \frac{n+2}{2^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich setze $z_0 = e^{i\theta_0}$; dann ist $c_1 = -\frac{z_0}{2}$, also

$$\Delta_n(z) = \frac{n+1}{2^n} z^n + \frac{z_0}{2} \frac{n}{2^{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \frac{z_0^n}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2^n}\left[(n+1) z^n + n z_0 z^{n-1} + \ldots + z_0^n\right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\left[(n+1) z^n + n z_0 z^{n-1} + \ldots + z_0^n\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Als Anwendung behandle ich nach Abschnitt 35 die folgende Minimum-Aufgabe:

Welche ist die obere Grenze des Maximums von $\varphi(\theta)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$, während $\varphi(\theta)$ die Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung mit der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(\theta - \theta_0)]\, \varphi(\theta)\, d\theta = 1$$

durchläuft?

[21]) S. Fußnote [19]).

[22]) Man vgl. L. Fejér, a. a. O. [9]), S. 79.

Man hat offenbar

$$|\varphi_n(z)| \leqq \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$(|z| = 1;\ n \geqq 1),$$

o das Gleichheitszeichen nur für $z = z_0$ gültig ist; also hat man

$$s_n(z,z) = |\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 \leqq \sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{3} = \binom{n+3}{2}$$

$$(|z| = 1).$$

as ist die gesuchte obere Grenze, d. h.

$$\varphi(\theta) \leqq \binom{n+3}{3}.$$

as Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta) = \frac{|s_n(z_0, z)|^2}{\binom{n+3}{3}} \qquad (z = e^{i\theta})$$

nd für $\theta = \theta_0$ gültig. Man hat aber

$$\varphi_k(z_0) = z_0^k \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

nd

$$\overline{\varphi_k(z_0)}\,\varphi_k(z) = \bar{z}_0^k [(k+1) z^k + k z_0 z^{k-1} + \ldots + z_0^k]$$

$$= (k+1)(\bar{z}_0 z)^k + k(\bar{z}_0 z)^{k-1} + \ldots + 1,$$

so

$$s_n(z_0, z) = n + 1 + n \cdot 2(\bar{z}_0 z) + \ldots + 2 \cdot n(\bar{z}_0 z)^{n-1} + (n+1)(\bar{z}_0 z)^n,$$

h.

$$\varphi(\theta) = \frac{|n+1+n \cdot 2z + \ldots + 2 \cdot n z^{n-1} + (n+1) z^n|^2}{\binom{n+3}{3}} \qquad [z = e^{i(\theta - \theta_0)}]$$

Daraus folgt der Satz:

Es sei

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta + \ldots + \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$

n nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung und

$$\alpha_0 - \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{2} = 1\ ^{23}).$$

---

23) D. h. $\lambda^{(1)} = 1$. (S. Abschnitt 18.)

Dann ist

$$\varphi(\theta) \leqq \binom{n+3}{3}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta) = \frac{|n+1+n\cdot 2z+\ldots+2\cdot n z^{n-1}+(n+1)z^n|^2}{\binom{n+3}{3}} \qquad [z = e^{i(\theta-\theta_0)}]$$

und für $\theta = \theta_0$ gültig, wo θ_0 irgendeinen solchen Winkel bezeichnet, für welchen

$$(\alpha_1 - i\beta_1)\, e^{i\theta_0}$$

reell und nichtnegativ ist.

Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \alpha_0$$

und

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos(\theta-\theta_0)\, d\theta = \alpha_1\cos\theta_0 + \beta_1\sin\theta_0 = \Re(\alpha_1 - i\beta_1)\, e^{i\theta_0} = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}.$$

(Eingegangen am 26. Februar 1919.)

Ein Irreduzibilitätssatz in der Theorie der symmetrischen Matrizen.

Von

Josef Kürschák in Budapest.

---

1. Es bedeute M_n die Matrix

$$\| y_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

o $y_{ik} = y_{ki}$ ist, sonst aber die y_{ik} unabhängige Veränderliche sind.

Jede lineare Funktion F der Unterdeterminanten der symmetrischen Matrix M_n ist eine irreduzible rationale ganze Funktion der y_{ik}.

Für $n = 2$ gehören zur Matrix

$$M_2 = \begin{Vmatrix} x & y \\ y & z \end{Vmatrix}$$

ßer ihrer Determinante zweiten Grades nur noch x, y, z als Unterterminanten ersten Grades. Es ist demnach

$$F = A(xz - y^2) + Bx + 2Cy + Dz + E.$$

Im Falle $A = 0$ ist nun F als lineare Funktion von x, y, z sicher eduzibel. Ist aber $A \neq 0$, so kann F nur dann in lineare Faktoren rfallen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A & B \\ 0 & -2A & 0 & 2C \\ A & 0 & 0 & D \\ B & 2C & D & 2E \end{vmatrix}$$

chstens vom Range 2 ist. Dies ist aber wegen

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & -2A & 0 \\ A & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2A^3 \neq 0$$

sgeschlossen.

Für $n > 2$ werden wir die Irreduzibilität von F mittels vollständiger Induktion beweisen.

2. Bekanntlich[1]) genügt jede Unterdeterminante der Matrix M_n, also auch jede lineare Funktion dieser Determinanten, den partiellen Differentialgleichungen

$$(S) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu}\partial y_{k\nu}}(1+\delta_{i\mu})(1+\delta_{k\nu})$$
$$+\frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu}\partial y_{k\mu}}(1+\delta_{i\nu})(1+\delta_{k\mu}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo δ_{ik} Null oder Eins bedeutet, je nachdem i und k gleiche oder verschiedene Werte haben.

Die Ableitung dieser (für das Folgende wichtigen) Gleichungen kann sich auf den Fall beschränken, daß F nur aus einer Determinante besteht. Ist nun z. B.

$$F = \begin{vmatrix} y_{12} & y_{14} \\ y_{32} & y_{34} \end{vmatrix},$$

so kann F auch so geschrieben werden:

$$F = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

In ähnlicher Weise kann jede Determinante der Matrix M_n auf die Gestalt

$$F = |u_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gebracht werden, wo die i-te Zeile entweder aus den Größen

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}$$

oder aus lauter Zahlen besteht, also jedenfalls

$$\frac{\partial u_{i1}}{\partial y_{i1}} = \frac{\partial u_{i2}}{\partial y_{i2}} = \ldots = \frac{\partial u_{in}}{\partial y_{in}}$$

ist. Den gemeinsamen Wert (Eins oder Null) dieser Ableitungen bezeichnen wir mit a_i.

Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}(1+\delta_{ik}) = F_{ik}a_i + F_{ki}a_k,$$

[1]) A. Hirsch, Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, Math. Annalen, 49 (1897), S. 49—72 [S. 69, ohne Ableitung].

F_{ik} die zu u_{ik} adjungierte Subdeterminante von F bedeutet. Des iteren ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\,\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu})$$
$$= F_{ik,\mu\nu}a_i a_\mu + F_{ik,\nu\mu}a_i a_\nu + F_{ki,\mu\nu}a_k a_\mu + F_{ki,\nu\mu}a_k a_\nu.$$

ier bedeutet $F_{ik,\mu\nu}$, wenn i von μ und k von ν verschieden ist, die zu $_\nu$ adjungierte Subdeterminante von F_{ik}. Für $i=\mu$ oder $k=\nu$ ist $_{k,\mu\nu}$ gleich Null.

Demnach können wir die linken Seiten der Gleichungen (S) als Summen n je sechs Gliedern vom Typus

$$(F_{ik,\mu\nu}+F_{i\nu,\mu k})a_i a_\mu$$

rstellen. Ziehen wir noch in Betracht, daß $F_{ik,\mu\nu}$ und $F_{i\nu,\mu k}$ nur dem rzeichen nach verschieden sind, so werden wir zum Systeme (S) geführt.

3. Es bedeute nun F eine beliebige lineare Funktion der Unterterminanten von M_n mit der einzigen Beschränkung, daß y_{nn} in F nicht rkommt. Dabei darf in den einzelnen Determinanten, als deren Aggregat dargestellt ist, eventuell auch y_{nn} als Element vorkommen; wir verngen nur, daß aus der nach $y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{nn}$ entwickelten Gestalt von die Größe y_{nn} herausfällt.

Es ist also

$$F = C_0 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i y_{in} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} C_{ik}\,y_{in}\,y_{kn},$$

die Koeffizienten C lineare Funktionen der Matrix M_{n-1} bedeuten nd $C_{ik}=C_{ki}$ ist).

Diejenigen Gleichungen des Systems (S), in denen $\mu=\nu=n$ ist, erben $C_{ik}=0$. Demnach ist F in den Größen y_{in} linear. Eine Zerlegung n F ist also nur in der Weise denkbar, daß die Koeffizienten C einen lchen gemeinsamen Teiler H haben, der wenigstens eine der Größen

$$y_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n-1)$$

thält.

Da wir die Irreduzibilität für die linearen Funktionen der Determinanten von M_{n-1} als bekannt annehmen, so sind die C irreduzible unktionen der y_{ik}. Im Falle eines gemeinsamen Teilers H unterscheiden sich also von H nur durch konstante Faktoren. Es ist demnach

$$F = H(c_0 + c_1 y_{1n} + c_2 y_{2n} + \ldots + c_{n-1}y_{n-1n}),$$

die c Konstanten bedeuten. Außerdem dürfen und wollen wir $c_1=1$ nehmen.

Diejenigen Gleichungen des Systems (S), in denen $i=1$, $\nu=n$ ist, ergeben

$$\frac{\partial H}{\partial y_{k\mu}}(1+\delta_{k\mu})+c_k\frac{\partial H}{\partial y_{1\mu}}(1+\delta_{1\mu})+c_\mu\frac{\partial H}{\partial y_{1k}}(1+\delta_{1k})=0$$
$$(k,\mu=1,2,\ldots,n-1).$$

Für $k=\mu=1$ ergibt sich hieraus das Verschwinden von $\frac{\partial H}{\partial y_{11}}$; für $k=1$, $\mu>1$ folgt sodann das Verschwinden von $\frac{\partial H}{\partial y_{1\mu}}$; schließlich erhalten wir allgemein

$$\frac{\partial H}{\partial y_{k\mu}}=0 \qquad (k,\mu=1,2,\ldots,n-1).$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß H wenigstens eine der Größen (1) wirklich enthält.

4. Wenn in F auch y_{nn} vorkommt, so ist

$$F=Hy_{nn}+K,$$

wo H eine lineare Funktion der Determinanten von M_{n-1} bedeutet und K außer den Veränderlichen (1) nur noch

(2) $$y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{n-1n}$$

enthält.

Bei einer etwaigen Zerlegung von F müßte wegen der Irreduzibilität von H der eine Faktor H selbst sein. Folglich wäre

$$F=H(y_{nn}+U),$$

wo U eine rationale ganze Funktion der Größen (1) und (2) bedeutet und H wenigstens eine der Größen (1) wirklich enthält.

Nach den Größen (2) entwickelt ist

$$HU=C_0+\sum_{i=1}^{n-1}C_iy_{in}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}C_{ik}y_{in}y_{kn},$$

wo die Koeffizienten C lineare Funktionen der Determinanten von M_{n-1}, also irreduzible Funktionen der Größen (1) sind. Die Größen C können sich sonach nur durch konstante Faktoren von ihrem gemeinsamen Teiler H unterscheiden. Das heißt, es ist

$$F=H\left(y_{nn}+c_0+\sum_{i=1}^{n-1}c_iy_{in}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}y_{in}y_{kn}\right),$$

wo die c Konstanten bedeuten (und $c_{ik}=c_{ki}$ ist).

Diejenigen Gleichungen des Systems (S), in denen $\mu = \nu = n$ ist, geben

$$\frac{\partial H}{\partial y_{ik}}(1 + \delta_{ik}) + 2 c_{ik} H = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ist hier y_{ik} eine solche Größe, die in H wirklich vorkommt, so kann e ihr entsprechende Gleichung unmöglich bestehen. Wenn nämlich $_{k} = 0$ ist, so ist die Richtigkeit der Gleichung ausgeschlossen, weil $\frac{\partial H}{\partial y_{ik}}$ n Null verschieden ist. Für $c_{ik} \neq 0$ ist die Gleichung darum unmöglich, eil H und $\frac{\partial H}{\partial y_{ik}}$, als Funktionen von y_{ik} betrachtet, verschiedene Grade haben.

(Eingegangen am 5. Januar 1920.)

Zur Theorie der linearen Integralgleichungen.

Von

T. Carleman in Upsala.

Wenn der Kern einer Fredholmschen Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

auf der Diagonale $y = x$ streckenweise unendlich wird, so verlieren die in den Koeffizienten der Reihen $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)$ auftretenden Integrale ihren Sinn. In seiner grundlegenden Arbeit hat Fredholm gezeigt, daß für eine sehr umfassende Klasse (L) derartiger Integralgleichungen (nämlich solcher, für welche ein iterierter Kern $K^{(\nu)}(x, y)$ existiert, der eine beschränkte Funktion von x und y ist) dieselben Gesetze gelten wie für Integralgleichungen mit stetigen Kernen[1]). Hilbert betrachtete (Gött. Nachrichten 1904) statt der Reihen $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)$ die folgenden

$$(1) \qquad D^*(\lambda) = \sum \delta_n \lambda^n = \sum \frac{(-\lambda)^n}{\lfloor n} \int\int \cdots \int \begin{vmatrix} 0 & K(s_1, s_2) & \cdots & K(s_1 s_n) \\ K(s_2, s_1) & 0 & \cdots & K(s_2 s_n) \\ \cdots\cdots & & & \cdots\cdots \\ K(s_n, s_1) & & \cdots & 0 \end{vmatrix} ds_1 \ldots d$$

$$(2) \qquad D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \sum \delta_n \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \lambda^n = \sum \frac{(-\lambda)^n}{\lfloor n} \int\int \cdots \int \begin{vmatrix} K(x, y), K(x, s_1) & \cdots & K(x, s_n) \\ K(s_1, y), & 0 & \cdots & K(s_1, s_n) \\ \cdots\cdots & & & \cdots\cdots \\ K(s_n, y), K(s_n, s_1) & \cdots & & 0 \end{vmatrix} ds_1$$

---

[1]) Hiermit ist aber die Gesamtheit derjenigen Kerne, für welche diese Gesetze gelten, nicht erschöpft, wie das Beispiel

$$K(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{\log^2 n} \qquad \left(0 \leq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leq \pi\right)$$

lehrt. Man sieht sofort, daß $K(x, y)$ der Klasse L nicht angehört, weil ja der Konvergenzexponent der zu einem solchen Kerne gehörigen Eigenwerte endlich sein muß.

Er hat durch direkte Abschätzung der Koeffizienten bewiesen, daß ese Reihen beständig konvergieren, wenn $K(x, y)$ auf der Diagonale $= y$ von niederer als der der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich wird, d. h. wenn einen gewissen unterhalb $\frac{1}{2}$ liegenden Exponenten α gibt, so daß das odukt

$$|x - y|^{\alpha} K(x, y)$$

dlich bleibt. Für δ_n z. B. ergab sich die Ungleichung

$$|\delta_n| < \frac{c^n}{n^{n(\frac{1}{2}-\alpha)}} \qquad (c \text{ konstant}).$$

Im folgenden wird gezeigt, daß diese Reihen auch dann beständig nvergieren, wenn man nur voraussetzt, daß

$$\iint |K(x, y)|^2 \, dx \, dy$$

n Sinne von Lesbesgue) konvergiert[2]). Ferner ergibt sich, daß die Uneichung (3) durch die schärfere

$$|\delta_n| < \frac{c^n}{n^{\frac{n}{2}}}$$

setzt werden kann. Die Ordnung der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ ist soit $\leqq 2$.

Mit Hilfe dieser Funktionen wird ferner gezeigt, daß die Fredholmschen ätze auch ferner für solche Integralgleichungen

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt = f(s)$$

lten, wo $|K(s, t)|^2$ und $|f(s)|^2$ summierbare Funktionen sind[3]). Schließh wird eine Formel betreffend den Fredholmschen Nenner einer Summe n zwei Kernen bewiesen. Aus dieser Formel ergibt sich die Folgerung, ß das Geschlecht (Höhe) von $D^*(\lambda)$ höchstens gleich Eins sein kann.

§ 1.

In diesem Paragraphen suchen wir obere Grenzen der absoluten Beäge von $D^*(\lambda)$ und $D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ unter der Annahme, daß $K(x, y)$ stetig und der Nebenbedingung

[2]) Vgl. hierzu H. von Koch, Sur la convergence de determinants infinis, Rend. circ. mat. di Palermo, 28 (1909), S. 255–266 insb. S. 264.

[3]) Es ist klar, daß dieses Resultat durch viele andere Methoden abgeleitet werden kann. Das hier angewandte Verfahren beweist die Existenz einer quadratisch integrierbaren Resolventen, die als Quotient der Funktionen (2) und (1) dargestellt werden kann. Vgl. auch Lesbesgue, Bull. de la Soc. mathematique de France 36 (1908) S. 3–19.

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,dx\,dy \leqq \Omega \qquad (\Omega \text{ konstant}) \tag{7}$$

genügt. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir hier annehmen, daß $K(x,y)$ in bezug auf x oder y eine stetige Ableitung besitzt oder sogar ein Polynom ist, weil es immer eine Polynomfolge $P_1(x,y)$, $P_2(x,y), \ldots, P_n(x,y), \ldots$ gibt, so daß gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} P_n(x,y) = K(x,y) \tag{8}$$

und weil ferner

$$\lim_{n=\infty} D^*_{P_n}(\lambda) = D^*_K(\lambda)\ ^*).$$

Es sei nun $K_1(x,y)$ der durch die Festsetzungen

$$K_1(x,y) = K(x,y) \qquad (x \neq y)$$
$$K_1(x,x) = 0$$

definierte Kern. Dann gilt

$$D^*_K(\lambda) = D_{K_1}(\lambda).$$

Weil ferner

$$K_1^{(m)}(x,y) = K^{(m)}(x,y) \qquad (m \geqq 2), \tag{9}$$

so folgt aus der Formel

$$\log D^*_K(\lambda) = \log D_{K_1}(\lambda) = -\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu}\int_a^b K_1^{(\nu)}(s,s)\,ds$$

$$= -\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu}\int_a^b K^{(\nu)}(s,s)\,ds = \lambda\int_a^b K(s,s)\,ds + \log D_K(\lambda)$$

$$D^*_K(\lambda) = e^{\lambda\int_a^b K(s,s)\,ds} D_K(\lambda). \tag{10}$$

Wenn $K(x,y)$ eine stetige Ableitung in bezug auf x oder y besitzt, so ist $D_K(\lambda)$ vom Geschlecht Null und folglich gilt

$$D_K(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right); \qquad \int_a^b K(s,s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ die Nullstellen von $D(\lambda)$ sind. Somit

$$D^*_K(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}$$

---

*) Wenn es nötig ist hervorzuheben, daß $D(\lambda)$ und $D^*(\lambda)$ mit dem Kern $K(x,y)$ gebildet sind, schreiben wir $D_K(\lambda)$ bzw. $D^*_K(\lambda)$.

eraus ergibt sich, indem wir den reellen Teil von $\frac{\lambda}{\lambda_\nu}$ mit $\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]$ be-
chnen,

$$|D_K^*(\lambda)|^2 = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]+\left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right|^2\right)e^{2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]}$$

$$\leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]+\left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right|^2+2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]} = e^{|\lambda|^2\sum\frac{1}{|\lambda_\nu|^2}}.$$

il nach einem Resultate von I. Schur[5])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leqq \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,ds\,dt \leqq \Omega,$$

ergibt sich hieraus schließlich

$$|D^*(\lambda)| \leqq e^{\frac{\Omega}{2}|\lambda|^2}.$$

es ist, wie das folgende Beispiel lehrt, die genaue obere Grenze von
$^*(\lambda)|$ bei der Nebenbedingung (7). Schreibt man

$$G_m(x,y) = e^{i\Theta}\sqrt{\frac{\Omega}{2m}}\left\{\sum_{\nu=1}^{m}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y) - \sum_{\nu=m+1}^{2m}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)\right\},$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ein unendliches normiertes Orthogonalsystem
bezug auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist, so wird, wenn wir zur Abkürzung
$= e^{i\Theta}\sqrt{\frac{\Omega}{2m}}$ setzen,

$$D_{G_m}^*(\lambda) = (1-\lambda H)^m e^{m\lambda H}(1+\lambda H)^m e^{-m\lambda H}$$
$$= (1-\lambda^2 H^2)^m = \left(1-\lambda^2 e^{2i\Theta}\frac{\Omega}{2m}\right)^m.$$

eraus ergibt sich, indem wir

$$\lambda = e^{i\eta}|\lambda|, \qquad \theta+\varphi = \frac{\pi}{2}$$

zen,

$$D_{G_m}^*(\lambda) = \left(1+|\lambda|^2\frac{\Omega}{2m}\right)^m.$$

lglich ist

$$\lim_{m=\infty}|D_{G_m}^*(\lambda)| = e^{\frac{\Omega}{2}|\lambda|^2},$$

raus die Behauptung folgt.

---

[5]) Vgl. I. Schur, Über die charakteristischen Wurzeln einer inneren Substitution einer Anwendung auf die Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Ann., (1909), S. 488, insb. S. 508.

Für die Koeffizienten

$$\delta_n = \frac{1}{\lfloor n} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & K(s_1, s_2), \ldots, & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1), & 0 \quad , \ldots, & K(s_2, s_n) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ K(s_n, s_1), & K(s_n, s_2), \ldots, & 0 \end{vmatrix} ds_1\, ds_2\, ds_n$$

ergibt sich aus (11)

$$|\delta_n| \leqq \frac{(\sqrt{e\Omega})^n}{n^{\frac{n}{2}}}. \tag{12}$$

Dies ist aber nicht die genaue obere Grenze von $|\delta_n|$, wie man leicht im Falle $n = 2$ und $n = 3$ findet.

Das Problem, das Maximum von $|D^*(\lambda)|$ und δ_n zu finden, läßt sich mit den gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung behandeln. Ich hoffe, auf diese Frage in einer anderen Arbeit zurückzukommen.

Wir gehen nun dazu über, $D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ abzuschätzen und betrachten dabei zunächst reelle symmetrische Kerne $K(x, y)$. Es ist, indem wir unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ die Eigenwerte und unter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen verstehen,

$$D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = D^*(\lambda)\left(K(x, y) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}\right)$$

$$= D^*(\lambda) K(x, y) + \lambda \sum_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

Ferner gilt

$$\frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} = e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}} \prod_{\nu \neq n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}},$$

$$\left| \frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} \right| < e^{\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_n}\right]} e^{\sum_{\nu \neq n} \left(\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right] + \frac{|\lambda|^2}{2} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} + \Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]\right)}$$

$$= e^{\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_n}\right]} e^{\frac{|\lambda|^2}{2} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}} < e^{|\lambda|\sqrt{\Omega} + \frac{|\lambda|^2}{2}\Omega}$$

Somit

$$\left| \sum_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} \right| < e^{|\lambda|\sqrt{\Omega} + \frac{|\lambda|^2}{2}\Omega} \sum \left| \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \right| \cdot \left| \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \right|$$

$$\leqq e^{\frac{|\lambda|^2}{2}\Omega + |\lambda|\sqrt{\Omega}} \sqrt{\int_a^b K(x, s)^2\, ds \cdot \int_a^b K(y, s)^2\, ds}.$$

ir bekommen also schließlich die folgende Ungleichung

$$\left|D^*\binom{x}{y}\middle|\lambda\right)\right| \leqq e^{\frac{|\lambda|^2}{2}\Omega}\left(|K(x,y)|+|\lambda|\,e^{|\lambda|\sqrt{\Omega}}\sqrt{\int_a^b K(x,s)^2\,ds\int_a^b K(y,s)^2\,ds}\right).$$

Um im allgemeinen Falle, wo $K(x,y)$ eine komplexe unsymmetrische unktion ist, eine Relation von der Form (13) zu erhalten, beweisen wir nächst die folgende Determinantenungleichung. Es sei

4)
$$D=\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & a_{1,p+1}, & \ldots, & a_{1,p+q} \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{2,p+1}, & \ldots, & a_{2,p+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{p,p+1}, & \ldots, & a_{p,p+q} \\ a_{p+1,1}, & \ldots, & a_{p+1,p}, & a_{p+1,p+1}, & \ldots, & a_{p+1,p+q} \\ a_{p+2,1}, & \ldots, & a_{p+2,p}, & a_{p+2,p+1}, & \ldots, & a_{p+2,p+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p+q,1}, & \ldots, & a_{p+q,p}, & a_{p+q,p+1}, & \ldots, & a_{p+q,p+q} \end{vmatrix}$$

ie Determinante, wo $q>p$, und ferner

5)
$$\sum_{\nu=1}^{q}|a_{n,p+\nu}|^2=L_n \qquad (n=1,2,\ldots,p),$$

6)
$$\sum_{\nu=1}^{q}|a_{p+\nu,n}|^2=M_n \qquad (n=1,2,\ldots,p),$$

7)
$$\sum_{s=1}^{q}\sum_{t=1}^{q}|a_{p+s,p+t}|^2=N.$$

nn gilt

8)
$$|D|\leqq(L_1L_2\ldots L_p)^{\frac{1}{2}}\cdot(M_1M_2\ldots M_p)^{\frac{1}{2}}\frac{N^{\frac{q-p}{2}}}{(q-p)^{\frac{q-p}{2}}}.$$

s Gleichheitszeichen kann nicht ausgeschlossen werden.

Der von mir ursprünglich gefundene Beweis für diesen Determinanten- z macht von den Hilfsmitteln der Differentialrechnung Gebrauch. Herrn Riesz, dem ich den Satz mitgeteilt habe, verdanke ich einen etwas rzeren Beweis, der ebenfalls eine der Infinitesimalrechnung angehörende trachtung benutzt. Ich lasse hier einen rein algebraischen Beweis fol- n, auf den mich Herr I. Schur aufmerksam gemacht hat:

Durch eine unitär orthogonale lineare Transformation der q letzten len und eine ebensolche Transformation der q letzten Kolonnen kann, e in bekannter Weise leicht geschlossen wird, erreicht werden, daß D eine Determinante $D'=|a'_{\varkappa\lambda}|$ übergeht, in der nicht nur für $\varkappa\leqq p$,

$\lambda \leqq p$, sondern auch für $\varkappa \leqq p$, $\lambda > p + \varkappa$ oder $\lambda \leqq p$, $\varkappa > p + \lambda$ die Elemente $a'_{\varkappa\lambda}$ den Wert Null erhalten. Hierbei bleiben die Zahlen $|D|$, L_n, M_n und N ungeändert. Es wird aber

$$D' = (-1)^p a'_{1,p+1} a'_{2,p+2} \ldots a'_{p,2p} a'_{p+1,1} a'_{p+2,2} \ldots a'_{2p,p} \begin{vmatrix} a'_{2p+1,2p+1}, \ldots, a'_{2p+1,} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a'_{p+q,2p+1}, \ldots, a'_{p+q,p} \end{vmatrix}$$

Nach dem Hadamardschen Determinantensatz wird daher

$$|D|^2 = |D'|^2 \leqq \prod_{\varkappa=1}^{p} |a'_{\varkappa,p+\varkappa} a'_{p+\varkappa,\varkappa}|^2 \cdot \prod_{\alpha=1}^{q-p} \sum_{\beta=1}^{q-p} |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2.$$

Hieraus folgt die zu beweisende Ungleichung (18), indem man beachtet, daß

$$|a'_{\varkappa,p+\varkappa}|^2 \leqq \sum_{\lambda=1}^{q} |a'_{\varkappa,p+\lambda}|^2 = L_\varkappa, \qquad |a'_{p+\varkappa,\varkappa}|^2 \leqq \sum_{\lambda=1}^{q} |a'_{p+\lambda,\varkappa}|^2 = M_\varkappa$$

und nach dem Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\prod_{\alpha=1}^{q-p} \left(\sum_{\beta=1}^{q-p} |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2 \right) \leqq \left(\frac{\sum_{\alpha,\beta}{}_1 |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2}{q-p} \right)^{q-p}$$

$$\leqq \left(\frac{\sum_{\varkappa,\lambda}{}_1 |a'_{p+\varkappa,p+\lambda}|^2}{q-p} \right)^{q-p} = \left(\frac{N}{q-p} \right)^{q-p}$$

wird.

Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück, eine obere Grenze von $\left| D^* \binom{x}{y} \middle| \lambda \right)$ zu finden. Dabei werden die folgenden Formeln benutzt, die aus den Resultaten von Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. I) leicht gefolgert werden können. Es sei

$$k^{(n)}_{p,q} = K\left(a + \frac{lp}{n},\ a + \frac{lq}{n}\right) \qquad (l = b - a),$$

$$k^{(n)}_{x,p} = K\left(x,\ a + \frac{lp}{n}\right), \qquad k^{(n)}_{p,y} = K\left(a + \frac{lp}{n},\ y\right).$$

Dann gelten die Beziehungen:

$$(19) \qquad D^*_K(\lambda) = \lim_{n=\infty} \begin{vmatrix} 1, & -\frac{\lambda l k^{(n)}_{12}}{n}, \ldots, & -\frac{\lambda l k^{(n)}_{1,n}}{n} \\ -\lambda l k^{(n)}_{21}, & 1 & -\frac{\lambda l k^{(n)}_{2n}}{n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{\lambda l k^{(n)}_{n,1}}{n}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix},$$

$$\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = D_K^*(\lambda)\,K(x,y)$$

$$+\lambda \lim_{n=\infty} \begin{vmatrix} 0, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,1}^{(n)}, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,2}^{(n)}, \ldots, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,n}^{(n)} \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{1,y}^{(n)}, & 1, & -\frac{\lambda l}{n}k_{12}^{(n)}, \ldots, & -\frac{\lambda l}{n}k_{1,n}^{(n)} \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{2,y}^{(n)}, & -\frac{\lambda l}{n}k_{21}^{(n)}, & 1, \ldots, & -\frac{\lambda l}{n}k_{2,n}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{n,y}^{(n)}, & -\frac{\lambda l}{n}k_{n,1}^{(n)}, & \ldots, & 1, \end{vmatrix}$$

Infolge der Hadamardschen Ungleichung ergibt sich

$$|d_n^*(\lambda)|^2 \leqq \prod_{p=1}^{n}\left(1+|\lambda|^2 \sum_q{}' \frac{|k_{pq}^{(n)}|^2}{n^2}\right) \leqq e^{|\lambda|^2 \Sigma\Sigma' \frac{|k_{pq}^{(n)}|^2}{n^2} l^2},$$

voraus durch einen Grenzübergang die Relation (11) folgt. Wenden wir auf die in (20) auftretende Determinante den oben erwähnten Determinantensatz ($p=1, q=n$) an, so finden wir

$$\left|D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)\right| \leqq e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}} \cdot |K(x,y)| + |\lambda| \lim_{n=\infty} \sqrt{\sum_{p=1}^{n} \frac{|k_{xp}^{(n)}|^2}{n} l \cdot \sum_{p=1}^{n} \frac{|k_{p,y}^{(n)}|^2}{n} l} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n=\infty} \left\{\left(n + \sum_{p,q}{}' \frac{|\lambda|^2 l^2}{n^2} |k_{pq}^{(n)}|^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \Big/ \frac{1}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}\right\} =$$

$$= e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}} |K(x,y)| + |\lambda|\,\alpha(x)\,\beta(y) \cdot \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{p,q}{}' \frac{|\lambda|^2}{n^2} |k_{pq}^{(n)}|^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \lim \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} = e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}} \left\{|K(x,y)| + |\lambda|\, e^{\frac{1}{2}} \alpha(x)\beta(y)\right\},$$

wo

$$\alpha(x)^2 = \int_a^b |K(x,s)|^2\,ds, \qquad \beta(x)^2 = \int_a^b |K(s,y)|^2\,ds$$

gesetzt ist. Es hat sich somit ergeben

$$\left|D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)\right| \leqq e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}} \left\{|K(x,y)| + |\lambda| \sqrt{e}\,\alpha(x)\beta(y)\right\}. \tag{21}$$

§ 2.

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Reihen $D^*(\lambda)$ und $D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ unter der Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine solche meßbare Funktion ist, für welche

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2\,ds\,dt$$

existiert. Wir müssen einerseits die Existenz der in den Koeffizienten von $D^*(\lambda)$ und $D^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ auftretenden mehrfachen Integrale beweisen, andererseits zeigen, daß diese Reihen ganze Funktionen von λ darstellen. Dies gelingt durch einen Grenzübergang unter Verwendung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate.

Es sei $\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y), \ldots, \Phi_n(x,y), \ldots$ eine Folge stetiger Funktionen, die (in bezug auf das Gebiet $a \leqq \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \leqq b$) ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden. Schreiben wir

$$C_p = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, \Phi_p(s,t)\, ds\, dt,$$

so läßt sich[6]) eine Indexfolge $m_1, m_2, \ldots, m_\nu \ldots$ so auswählen, daß

$$G_\nu(x,y) = \sum_{p=1}^{m_\nu} C_p \Phi_p(x,y)$$

für $\nu \to \infty$ fast überall gegen $K(x,y)$ konvergiert. Diese Funktionenfolge besitzt noch die Eigenschaften:

$$\int_a^b \int_a^b |G_\nu(x,y)|^2\, dy \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\, dy, \tag{22}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_a^b \int_a^b |K(x,y) - G_\nu(x,y)|^2\, dx\, dy = 0. \tag{23}$$

Die $G_\nu(x,y)$ können ferner, was für das Folgende wichtig ist, so gewählt werden, daß die Relationen

$$\begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} \int\limits_a^b |K(x,s) - G_\nu(x,s)|^2\, ds = 0, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \int\limits_a^b |K(s,y) - G_\nu(s,y)|^2\, ds = 0 \end{cases} \tag{24}$$

für fast alle x- und y-Werte im Intervalle (a,b) erfüllt sind. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satze: Es seien

$$\Omega_1(x,y), \Omega_2(x,y), \ldots, \Omega_n(x,y), \ldots$$

für fast alle Werte im Gebiete $a \leqq \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \leqq b$ definierte Funktionen, die positiv und summierbar sind und ferner noch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \int_a^b \Omega_n(x,y)\, dx\, dy = 0$$

erfüllen.

[6]) Vgl. H. Weyl, Math. Ann. 67 (1909), S. 225–245 insb. S. 243.

Dann kann man eine Indexfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ so auswählen, aß für fast alle x-Werte $(a \leqq x \leqq b)$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_a^b \Omega_{n_\nu}(x,y)\,dy = 0$$ [7])

t. Zum Beweise schreiben wir

$$\int_a^b \int_a^b \Omega_n(x,y)\,dx\,dy = \alpha_n, \qquad f_n(x) = \int_a^b \Omega_n(x,y)\,dy$$

nd wählen die Indexfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ so, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{n_\nu}$ konvergiert. s seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ positive gegen Null abnehmende Zahlen. Wir ezeichnen mit E_p diejenige Punktmenge im Intervalle $a \leqq x \leqq b$, für welche

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} f_{n_\nu}(x) \geqq \varepsilon_p.$$

Alle x-Werte, die so beschaffen sind, daß $\lim_{\nu=\infty} f_{n_\nu}(x)$ nicht existiert der nicht gleich Null ist, sind in der Menge

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_p + \ldots$$

nthalten. Hieraus folgt unser Satz, falls wir noch beweisen, daß jede unktmenge E_p vom Maße Null ist. Dies folgt aber leicht so: Das Maß erjenigen Punktmenge $H(p,\nu)$, für welche

$$f_{n_\nu}(x) \geqq \frac{\varepsilon_p}{2},$$

t wegen

$$\int_a^b f_{n_\nu}(x)\,dx = \alpha_{n_\nu}$$

leiner als

$$\frac{2\,\alpha_{n_\nu}}{\varepsilon_p}.$$

Veil nun E_p sicher der Menge

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} H(p,\nu),$$

o m beliebig groß sein kann, angehört, so ist das Maß von E_p kleiner als

$$\frac{2}{\varepsilon_p} \sum_{\nu=m}^{\infty} \alpha_{n_\nu},$$

elche Größe wegen der Konvergenz von $\sum \alpha_{n_\nu}$ für genügend große m leiner als jede vorgegebene positive Zahl wird. Jede Menge E_p ist also om Maße Null und folglich auch $\sum E_p$, w. z. b. w.

[7]) Nach einem Satz der Lesbesgueschen Integration von Doppelintegralen xistiert dies Integral für fast alle x im Intervalle $a \leqq x \leqq b$.

Die Meßbarkeit von $K(s,t)$ hat zur Folge, daß auch

$$K(s_1,s_2)K(s_2,s_3)\ldots\ldots K(s_{n-1},s_n)K(s_n,s_1) \tag{25}$$

im zugehörigen n-dimensionalen Gebiete (D_n), meßbar ist. Um einzusehen, daß (25) in D_n auch summierbar ist, brauchen wir den folgenden Satz[8]): „Wenn eine Folge von nicht negativen summierbaren Funktionen

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,\quad f_r(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots$$

fast überall gegen eine Grenzfunktion $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ konvergiert und wenn es ferner eine solche von n unabhängige Konstante K gibt, daß

$$\int\int\ldots\int f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n < K$$

so ist $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ summierbar und

$$\int\int\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \leqq K\text{“}.$$

Man findet, wie folgt, eine obere Grenze von

$$\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b |G_m(s_1,s_2)|\cdot|G_m(s_2,s_3)|\ldots|G_m(s_n,s_1)|\,ds_1\,ds_2\ldots ds_n.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich, indem wir die Bezeichnungen

$$h(x)^2=\int_a^b |G_m(x,y)|^2\,dy,$$

$$k(x)^2=\int_a^b |G_m(y,x)|^2\,dy$$

einführen,

$$\int_a^b |G_m(s_1,s_2)|\cdot|G_m(s_2,s_3)|\,ds_2 \leqq h(s_1)k(s_2).$$

Ferner

$$\int_a^b\int_a^b |G_m(s_1,s_2)|\cdot|G_m(s_2,s_3)|\cdot|G_m(s_3,s_4)|\,ds_2\,ds_3$$

$$\leqq \int_a^b h(s_1)k(s_3)G_m(s_3,s_4)\,ds_3$$

$$\leqq h(s_1)\sqrt{\int_a^b k(s_3)^2\,ds}\cdot k(s_4)=h(s_1)\sqrt{\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|\,ds\,dt}\,k(s_4).$$

Setzen wir hier $s_1=s_4$, so ergibt sich nach Integration und nochmaliger Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_a^b\int_a^b\int_a^b |G_m(s_1,s_2)G_m(s_2,s_3)G_m(s_3,s_1)|\,ds_1\,ds_2\,ds_3 \leqq \left(\sqrt{\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|^2\,ds\,dt}\right)^3$$

[8]) Vgl. Fatou, Séries trigonometriques et séries de Taylor (Acta matematica 30 (1906), S. 375).

'ahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir für ein beliebiges n

26) $$\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b |G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3) \dots G_m(s_n, s_1)|\, ds_1\, ds_2 \dots ds_n$$

$$\leqq \left[\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|^2\, ds\, dt\right]^{\frac{n}{2}} \leqq \Omega^{\frac{n}{2}}.$$

Berücksichtigt man noch, daß fast überall im Gebiete D_n

$$\lim_{m=\infty} |G_m(s_1, s_2) \dots G_m(s_n, s_1)| = |K(s_1, s_2) \dots K(s_n, s_1)|,$$

o ergibt sich aus dem oben erwähnten Satz, daß

$$|K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1)|$$

ınd a fortiori

$$K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1)$$

n D_n summierbar ist. Weil nun jedes Glied in der Determinante

$$K^*\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K(s_1, s_2) \dots K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & 0 \quad \dots K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) \dots \quad 0 \end{vmatrix}$$

ein Produkt von Faktoren ist, die alle die Form (25) haben und von denen nie zwei gemeinsame Veränderlichen enthalten, so folgt hieraus die Existenz der Integrale

$$\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K^*\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_n.$$

Aus der Identität

$$\begin{aligned} &K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1) - G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3) \dots G_m(s_n, s_1) \\ &= (K(s_1, s_2) - G_m(s_1, s_2))\, K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1) \\ &+ G_m(s_1, s_2)\, [K(s_2, s_3) - G_m(s_2, s_3)]\, K(s_3, s_4) \dots K(s_n, s_1) \\ &+ G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3)\, [K(s_3, s_4) - G_m(s_3, s_4)]\, K(s_4, s_5) \dots K(s_n, s_1) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &+ G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3) \dots [K(s_n, s_1) - G_m(s_n, s_1)] \end{aligned}$$

rhält man durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung unter Berücksichtigung der Gleichung (23), daß

$$\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1)\, ds_1\, ds_2 \dots ds_n$$

$$= \lim_{m=\infty} \int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3) \dots G_m(s_n, s_1)\, ds_1\, ds_2 \dots ds_n$$

und somit

$$\lim \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b G_m^* \begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n$$

$$= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K^* \begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n.$$

Weil die Ungleichung (12) für jede der Größen

$$\left| \frac{1}{\underline{n}} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b G_m^* \begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n \right|$$

gilt, so folgt ihre Gültigkeit auch für

$$\left| \frac{1}{\underline{n}} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K^* \begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n \right|.$$

Also ist $D_K^*(\lambda)$ eine ganze Funktion von λ. Ferner ergibt sich leicht

$$\lim_{m=\infty} D_{G_m}^*(\lambda) = D_K^*(\lambda).$$

Mithin

$$\left| D_K^*(\lambda) \right| \leqq e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 \Omega}.$$

Man kann nun $D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ in ganz analoger Weise untersuchen. Zunächst wird mit Hilfe von (22), (23) und (24) bewiesen, daß

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_n, y) ds_1 ds_2 \dots ds_n = K^{(n+1)}(x, y)$$

für fast alle x, y-Werte $\left(a \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq b\right)$ existiert und ferner, daß

$$\lim_{m=\infty} G_m^{(p)}(x, y) = K^{(p)}(x, y).$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (26), daß (mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge) die Integrale in den Koeffizienten von $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ für $m \to \infty$ gegen die entsprechenden der Reihe $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ konvergieren. Wegen (21), angewendet auf $G_m(x, y)$, bleibt $D_{G_m}^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ kleiner als eine von m unabhängige nur von x, y, λ abhängige Konstante. Aus diesen beiden Tatsachen folgt nach einem bekannten Satze, daß $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ eine überall konvergente Potenzreihe von λ ist, die als Grenzwert von $D_{G_m}^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ für $m \to \infty$ dargestellt werden kann. Ferner genügt $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ mit Ausnahme

on höchstens einer Nullmenge der Ungleichung (21), woraus folgt, daß $D_K^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ und $D_K^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)^2$ im Gebiete $a \leqq \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \leqq b$ summierbare Funktionen nd.

Wir beweisen noch, daß für fast alle x und y die Relationen

27) $$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds = 0,$$

28) $$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}s\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}s\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds = 0$$

elten. Es möge für die Summe der ersten p Glieder einer Potenzreihe (λ) die Bezeichnung $\{P(\lambda)\}_p$ eingeführt werden. Die Summe der übrigleibenden Glieder nennen wir $\{P(\lambda)\}^{(p)}$. Es ist

$$\int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds$$

$$\int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}_p\right|^2 ds + 2\int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)}\right|^2 ds.$$

Vegen der leicht zu beweisenden Relation

29) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b |K^{(p)}(x,s) - G_m^{(p)}(x,s)|^2 ds = 0 \qquad \text{(für fast alle } x\text{)}$$

aben wir fast überall

30) $$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}_p\right|^2 ds = 0.$$

ei nun $|\lambda| < R$, wo R eine beliebige positive Zahl ist, ferner C_{2R} ein reis mit dem Radius $2R$ um den Nullpunkt.

Wir haben

$$\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)} = \frac{1}{2\pi i}\lambda^p \int_{C_{2R}} \frac{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|z\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|z\right)}{z^p(z-\lambda)} dz.$$

olglich wegen (21)

$$\left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{matrix}x\\s\end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)}\right| \leqq 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p e^{2R^2\Omega}\Big[|K(x,s)| + |G_m(x,s)|$$
$$+ 2R\sqrt{e}\sqrt{\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |K|t,s|^2 dt}$$
$$+ 2R\sqrt{e}\sqrt{\int_a^b |G_m(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |G_m(t,s)|^2 dt}\Big].$$

Erheben wir beide Seiten dieser Ungleichung ins Quadrat und integrieren in bezug auf s, so erkennen wir auf Grund der Relationen (22) und (24), daß

$$(31) \qquad \int_a^b \left| \left\{ D^*_{G_m}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) - D^*_K\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)} \right|^2 ds \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^p C(x, y),$$

wo $C(x, y)$ eine für fast alle x endliche Größe bedeutet, die von p und m unabhängig ist. Aus (29), (30) und (31) ergibt sich nun leicht (27). Auf analoge Weise erhält man (28).

Wir haben nun die nötigen Hilfsmittel gewonnen, um aus den Resolventengleichungen

$$D^*_{G_m}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b G_m(x, s)\, D^*_{G_m}\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds = D^*(\lambda)\, G_m(x, y),$$

$$D^*_{G_m}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b D^*_{G_m}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) G_m(s, y)\, ds = D^*(\lambda) G_m(x, y)$$

durch einen Grenzübergang $(m \to \infty)$ die Relationen (fast überall)

$$(32) \quad \begin{cases} D^*_K\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, D^*_K\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds = D^*(\lambda)\, K(x, y), \\ D^*_K\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b D^*_K\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) K(s, y)\, ds = D^*(\lambda) K(x, y) \end{cases}$$

zu folgern.

Dieses gelingt in leicht ersichtlicher Weise durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung bei Berücksichtigung von (27) und (28).

Nennen wir dann $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Lösungen von

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \\ \psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\, \psi(y)\, dy = g(x), \end{cases}$$

wenn diese Gleichungen für fast alle x erfüllt sind, und betrachten wir ferner zwei Funktionen, die nur in einer Nullmenge voneinander verschieden sind, als nicht verschieden, so können wir aus den Gleichungen (32) und aus den entsprechenden höheren Determinanten (die in derselben Weise zu begründen sind) genau so, wie es in der Arbeit Fredholms geschehen ist[11]*, die Fundamentalsätze betreffend die Lösbarkeit der Glei-*

[11]) Um zu beweisen, daß für eine Wurzel von $D^*(\lambda) = 0$ nicht alle Determinanten verschwinden können, kann man die Formel (42) benutzen.

ungen (33) und ihrer zugehörigen homogenen Gleichungen für den all beweisen, daß $|f(x)|^2$, $|g(x)|^2$ *und* $|K(x,y)|^2$ *in den Gebieten* $a \leqq x \leqq b$ *bzw.* $a \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq b$ *summierbare Funktionen sind.*

§ 3.

Um das Geschlecht der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ zu bestimmen, wird n nächsten Paragraphen eine Formel für den zu einer Summe von zwei ernen $G(s,t)+H(s,t)$ gehörigen Fredholmschen Nenner benutzt, ie in meiner Dissertation (Über das Neumann-Poincarésche Problem. psala 1916, S. 93) ohne Beweis angegeben wurde.

Diese Formel

$$D_{G+H}(\lambda) = D_G(\lambda)\cdot D_H(\lambda) - \lambda^2 \int_a^b\int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t \\ s \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) ds\,dt$$

$$- \frac{\lambda^4}{(\underline{|2})^2}\int_a^b\int_a^b\int_a^b\int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t_1, t_2 \\ s_1, s_2 \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) ds_1\,ds_2\,dt_1\,dt_2$$

. . . . . .

$$+ (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(\underline{|n})^2}\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s_1\, s_2 \ldots s_n \\ t_1\, t_2 \ldots t_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t_1\, t_2 \ldots t_n \\ s_1\, s_2 \ldots s_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) ds_1 \ldots ds_n\,dt_1 \ldots dt_n$$

. . . . . .

ann man folgendermaßen beweisen. Zunächst führen wir folgende Be-eichnungen ein. Die zu einem Kern G gehörige Resolvente

$$\frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{D(\lambda)}$$

ennen wir Γ_G. Das Resultat der Komposition zweier Kerne G und H

$$\int_a^b G(x,s)\,H(s,y)\,ds$$

ird mit GH bezeichnet.

Nach einer Formel von Platriér[10]) ist

$$35) \qquad D\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ y_1\, y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = D(\lambda)^{1-n} \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \\ \vdots \\ D\left(\begin{matrix} x_n \\ y_1 \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$= D(\lambda) \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, y_1\,|\,\lambda) \ldots \Gamma(x_1, y_n\,|\,\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma(x_n, y_1\,|\,\lambda) \ldots \Gamma(x_n, y_n\,|\,\lambda) \end{vmatrix}$$

[10]) Journ. de math. 1913, S. 233–304, insb. S. 249.

Wenden wir ferner die für beliebige Funktionen φ_i und ψ_k gültige Formel[11])

$$(36)\quad \int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} \varphi_1(s_1)\,\varphi_1(s_2)\dots\varphi_1(s_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(s_1)\,\varphi_n(s_2)\dots\varphi_n(s_n)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \psi_1(s_1)\,\psi_1(s_2)\dots\psi_1(s_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \psi_n(s_1)\,\psi_n(s_2)\dots\psi_n(s_n)\end{vmatrix} ds_1\dots ds_n$$

$$= \underline{|n} \begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1\psi_1 ds, \int_a^b \varphi_1\psi_2 ds, \dots, \int_a^b \varphi_1\psi_n ds\\ \dots\dots\dots\dots\\ \int_a^b \varphi_n\psi_1 ds, \int_a^b \varphi_n\psi_2 ds, \dots, \int_a^b \varphi_n\psi_n ds\end{vmatrix}$$

an, so ergibt sich

$$\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b D_G\begin{pmatrix} s_1 s_2\dots s_n\\ t_1 t_2\dots t_n\end{pmatrix}\lambda\Big) D_H\begin{pmatrix} t_1 t_2\dots t_n\\ s_1 s_2\dots s_n\end{pmatrix}\lambda\Big) ds_1 ds_2\dots ds_n dt_1\dots dt_n$$

$$= D_G(\lambda)D_H(\lambda)\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} \Gamma_G(s_1,t_1)\dots\Gamma_G(s_1,t_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_G(s_n,t_1)\dots\Gamma_G(s_n,t_n)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \Gamma_H(t_1,s_1)\dots\Gamma_H(t_n,s_1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_H(t_1,s_n)\dots\Gamma_H(t_n,s_n)\end{vmatrix} \begin{matrix} ds_1\dots\\ dt_1\dots\end{matrix}$$

$$= |n D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} \Gamma_G\Gamma_H(s_1,s_1)\dots\Gamma_G\Gamma_H(s_1,s_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_G\Gamma_H(s_n,s_1)\dots\Gamma_G\Gamma_H(s_n,s_n)\end{vmatrix} ds_1 ds_2\dots ds_n.$$

Durch Anwendung dieser Formel finden wir für die rechte Seite von (34) den Ausdruck

$$D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\,D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda).$$

Das Problem ist also darauf reduziert, die Relation

$$(37)\qquad D_{G+H}(\lambda) = D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\,D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda)$$

zu beweisen.

Schreibt man

$$(38)\qquad K(x,y) = K'(x,y) + K''(x,y) - \lambda\int_a^b K'(x,s)K''(s,y)\,ds,$$

so gilt nach einem Resultate von Fredholm

$$D_K(\lambda) = D_{K'}(\lambda)\,D_{K''}(\lambda).$$

Setzen wir hier

$$K' = G,\quad K'' = \lambda\Gamma_G\Gamma_H$$

und berücksichtigen, daß

$$\Gamma_G - G - \lambda G\Gamma_G = 0,$$

[11]) Vgl. G. Landsberg. Math. Ann., 69, S. 231.

o wird

$$K' + K'' - \lambda K'K'' = G + \lambda\Gamma_G\Gamma_H - \lambda^2 G\Gamma_G\Gamma_H = G + \lambda(\Gamma_G - \lambda G\Gamma_G)\Gamma_H$$
$$= G + \lambda G\Gamma_H,$$

omit

39) $$D_G(\lambda)\, D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda) = D_{G+\lambda G\Gamma_H}.$$

Venden wir die Formel (38) auf die beiden Kerne $G + \lambda G\Gamma_H$ und H n, so ergibt sich wegen

$$G + \lambda G\Gamma_H + H - \lambda(G + \lambda G\Gamma_H)H = G + H + \lambda G(\Gamma_H - H - \lambda\Gamma_H H)$$
$$= G + H,$$

40) $$D_H(\lambda)\, D_{G+\lambda G\Gamma_H}(\lambda) = D_{G+H}(\lambda),$$

voraus schließlich bei Berücksichtigung von (39) die zu beweisende Re- ation (37) folgt.

Wir erwähnen noch die folgende Formel

$$D_{GH}(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{(\underline{n})^2} \int\int \dots \int G\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{pmatrix} H\begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_n \, dt_1 \dots dt_n,$$

41) $$GH = \int G(x,s)\, H(s,y)\, ds.$$

Hieraus folgt, daß für beschränkte Funktionen G und H $D_{GH}(\lambda)$ höchstens ie Ordnung Eins besitzt. Noch allgemeiner gilt

$$D_{G_1 G_2 \dots G_m}(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{(\underline{n})^m} \int\int \dots \int G_1\begin{pmatrix} s_1^{(1)} \dots s_n^{(1)} \\ s_1^{(2)} \dots s_n^{(2)} \end{pmatrix} G_2\begin{pmatrix} s_1^{(2)} \dots s_n^{(2)} \\ s_1^{(3)} \dots s_n^{(3)} \end{pmatrix}$$
$$\dots G_m\begin{pmatrix} s_1^{(m)} s_2^{(m)} \dots s_n^{(m)} \\ s_1^{(1)} s_1^{(2)} \dots s_n^{(1)} \end{pmatrix} ds_1^{(1)} ds_2^{(1)} \dots ds_n^{(1)} ds_1^{(2)} \dots ds_n^{(2)} \dots ds_1^{(m)} \dots ds_n^{(m)},$$

$$G_1 G_2 \dots G_m = \int\int \dots \int G_1(x, s_1) G_2(s_1, s_2) \dots G_m(s_{m-1}, y)\, ds_1 ds_2 \dots ds_{m-1},$$

voraus folgt, daß $D_{G_1 G_2 \dots G_m}(\lambda)$ höchstens die Ordnung $\frac{m}{2}$ hat, wenn $G_1 G_2 \dots G_m$ beschränkte Funktionen sind.

Man sieht leicht, wenn man in (34) G und H mit Kernen G_1 und H_1 rsetzt, die sich nur dadurch von G und H unterscheiden, daß sie auf er Diagonale $y = x$ verschwinden, daß auch die folgende Formel richtig ist:

42) $$D^*_{G+H}(\lambda) = D^*_G(\lambda)\, D^*_H(\lambda) - \frac{\lambda^2}{1} \int_a^b\int_a^b D^*_G\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \lambda\Big) D^*_H\Big(\begin{matrix} t \\ s \end{matrix} \Big| \lambda\Big) ds\, dt$$

$$\dots + (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(\underline{n})^2} \int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b D^*_G\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{pmatrix} \lambda\Big) D^*_H\Big(\begin{matrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{matrix} \Big| \lambda\Big) ds_1 \dots ds_n \, dt_1 \dots dt_n \dots$$

§ 4.

Wir wollen nun das Geschlecht der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ unter der Annahme bestimmen, daß das Quadrat von $K(x,y)$ im Gebiete $a \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq b$ summierbar ist. Zu dem Zwecke schreiben wir

$$K(x,y) = G(x,y) + H(x,y), \tag{43}$$

wo $G(x,y)$ von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu(x) B_\nu(y) \tag{44}$$

ist und

$$\int_a^b \int_a^b |H(x,y)|^2 \, dx \, dy < \varepsilon \tag{45}$$

(ε = eine beliebig vorgegebene positive Zahl). Dieses kann man z. B. dadurch erreichen, daß man $G(x,y)$ einer geeigneten der früher eingeführten Funktionen $G_n(x,y)$ gleichsetzt, wenn das Orthogonalsystem

$$\Phi_1(x,y), \quad \Phi_2(x,y) \ldots \Phi_n(x,y) \ldots$$

von der speziellen Form

$$\varphi_p(x)\varphi_q(y) \quad (p = 1, 2, \ldots, \; q = 1, 2, \ldots)$$

gewählt ist, wo $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem in bezug auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ bedeutet. Wir wenden nun die Formel (42) an und bemerken, daß diese im vorliegenden Falle nur eine endliche Anzahl Glieder enthält, weil

$$D_G^*\left(\begin{matrix} s_1 s_2 \ldots s_n \\ t_1 t_2 \ldots t_n \end{matrix} \middle| \, \lambda\right) = 0 \tag{46}$$

für $n > m$. Um eine für unsere Zwecke geeignete obere Grenze von

$$\left| D_H^*\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_r \\ y_1 y_2 \ldots y_r \end{matrix} \middle| \, \lambda\right) \right|$$

zu erhalten, schreiben wir, zunächst unter der Annahme, daß $H(x,y)$ stetig ist, indem wir uns der Bezeichnungsweise auf S. 7 u. 8 bedienen,

$$D_H^*\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_r \\ y_1 y_2 \ldots y_r \end{matrix} \middle| \, \lambda\right) = \lim_{n=\infty} j_n, \tag{47}$$

$$\dot{J}_n = \begin{vmatrix} H_{x_1 y_1} & \dots, H_{x_1 y_r} & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_1 1} & \dots, -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_1 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{x_r y_1} & \dots, H_{x_r y_r} & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_r n} & \dots, -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_r n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{1 y_1}, \dots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{1 y_r} & 1, & -\frac{\lambda l}{n} H_{12}, \dots, & -\frac{\lambda l}{n} H_{1n} \\ \dots & -\frac{\lambda l}{n} H_{21} & 1, & -\frac{\lambda l}{n} H_{2n} \\ \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{n y_1}, \dots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{n y_r} & -\frac{\lambda l}{n} H_{n1} & \dots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ $(\varrho \leqq r)$ ϱ aus den Größen $1, 2, \dots, r$ gendwie herausgegriffenen verschiedenen Zahlen. Ferner mögen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-\varrho}$ $_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{r-\varrho}$) die übriggebliebenen von diesen Größen bezeichnen. benso möge auch $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\varrho$; $\delta_1, \dots, \delta_{r-\varrho}$ ein derartiges System von ahlen bedeuten. Dann gilt

$$\dot{J}_n = \sum \pm \frac{1}{\lfloor \varrho} H_{x_{\alpha_1} y_{\beta_1}} H_{x_{\alpha_2} y_{\beta_2}} \dots H_{x_{\alpha_\varrho} y_{\beta_\varrho}}$$

$$\begin{vmatrix} \dots\dots 0 & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_{\gamma_1} 1} & \dots, -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_{\gamma_1} n} \\ r-\varrho \text{ Zeilen} \quad \vdots & \dots & \dots \\ \dots\dots 0 & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_{\gamma_{r-\varrho}}} & \dots, -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{x_{\gamma_{r-\varrho}}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{1 y_{\delta_1}}, \dots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{1 y_{\delta_{r-\varrho}}} & 1 & -\frac{\lambda l}{n} H_{12}, \dots, -\frac{\lambda l}{n} H_{1n} \\ & -\frac{\lambda l}{n} H_{21} & 1 \quad \dots, \\ \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{n y_{\delta_1}}, \dots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}} H_{n y_{\delta_{r-\varrho}}} & -\frac{\lambda l}{n} H_{n1} & \dots, \quad 1 \end{vmatrix}.$$

ie Summe ist über alle möglichen Zahlensysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$; $, \beta_2, \dots, \beta_\varrho$ $(\varrho \leqq r)$ zu erstrecken. Hieraus folgt durch Anwendung des tzes (18) mit der Bezeichnung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |H_{x\nu}|^2 \frac{l}{n} = u_n(x)^2, \quad \sum_{\nu=1}^{n} |H_{\nu y}|^2 \frac{l}{n} = v_n(y)^2,$$

$$|\dot{J}_n| < \sum \frac{1}{\lfloor \varrho} |H(x_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) H(x_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) \dots H(x_{\alpha_\varrho}, y_{\beta_\varrho})|$$

$$\cdot |\lambda|^{r-\varrho} u_n(x_{\gamma_1}) \dots u_n(x_{\gamma_{r-\varrho}}) \cdot v_n(y_{\delta_1}) \dots v_n(y_{\delta_{r-\varrho}})$$

$$\cdot \left(\frac{n + |\lambda|^2 \sum' |H_{pq}|^2 \frac{l^2}{n^2}}{n-r+\varrho} \right)^{\frac{n-r+\varrho}{2}}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich, falls wir schreiben

$$\int_a^b |H(x,t)|^2 dt = u(x)^2; \quad \int_a^b |H(t,y)|^2 dt = v(y)^2,$$

$$\left| D_H^* \begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda \right| < \sum \frac{1}{|\varrho|} |H(x_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) \dots H(x_{\alpha_\varrho}, y_{\beta_\varrho})| \cdot$$

$$\cdot |\lambda \sqrt{e}|^{r-\varrho} u(x_{\gamma_1}) \dots u(x_{\gamma_{r-\varrho}}) \cdot v(y_{\delta_1}) \dots v(y_{\delta_{r-\varrho}}) \, e^{\frac{|\lambda|^2}{2} \int_a^b \int_a^b |H(s,t)|^2 ds\, dt}. \tag{49}$$

Durch dieselbe Art von Grenzübergängen, die in dieser Arbeit oft angewandt wurden. zeigt man, daß mit Ausnahme von einer Nullmenge im $2r$ dimensionalen Raum $a \leqq \begin{matrix} x_p \\ y_q \end{matrix} \leqq b \, (p = 1, 2, \dots, r, \, q = 1, 2, \dots, r)$, diese Ungleichung auch in dem Falle gültig bleibt, wo $|H(x,y)|^2$ für $a \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq b$ summierbar ist. Weil es eine Konstante C gibt, daß für $|\lambda| > 1$

$$\left| D_G^* \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_r \\ y_1, y_2, \dots, y_r \end{pmatrix} \lambda \right| < C |\lambda|^m,$$

finden wir schließlich aus (42), (49) und (45), daß zwei solche (von ε abhängige) Konstanten k und N existieren, daß für $|\lambda| > 1$

$$|D^*(\lambda)| < k |\lambda|^N e^{\frac{|\lambda|^2}{2}}. \tag{50}$$

Es seien $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots$ die Nullstellen von $D_{G_n}^*(\lambda)$ ($G_n(x,y)$ hat hier dieselbe Bedeutung wie auf S. 9). Nach dem schon zitierten Satze von I. Schur ist

$$\sum_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu^{(n)}|^2} \leqq \int_a^b \int_a^b |G_n(x,y)|^2 dx\, dy.$$

Durch einen Grenzübergang ergibt sich hieraus für die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ von $D^*(\lambda)$

$$\sum_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx\, dy.$$

Berücksichtigen wir noch, daß $D^*(\lambda)$ infolge (11) höchstens vom Geschlecht 2 ist, so folgt

$$D^*(\lambda) = e^{a\lambda^2 + b\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}. \tag{51}$$

Auf ganz dieselbe Weise, wie ich in einer früheren Arbeit (Arkiv för mat. astr. o fysik, Bd. 12, 1917) eine entsprechende Frage bezüglich $D_K(\lambda)$

= stetiger Kern) behandelt habe, kann man mit Hilfe von (50) schließen, ß

$$a = 0.$$

eil ferner

$$D^*(0) = 1, \quad \left(\frac{dD^*(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0,$$

ergibt sich aus

$$\frac{1}{D^*(\lambda)}\frac{dD^*(\lambda)}{d\lambda} = b + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu}\right) = b + \lambda\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu(\lambda-\lambda_\nu)},$$

ß b gleich Null ist. Wir haben somit das Resultat gewonnen:

$D^*(\lambda)$ ist höchstens vom Geschlechte Eins und besitzt die Produkt-rstellung

$$D^*(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}.$$

(Eingegangen am 19. Januar 1920.)

Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören.

Von

G. Szegő in Berlin.

Einleitung.

Herr Faber hat das Problem aufgeworfen, zu einem gegebenen Bereiche D in der komplexen x-Ebene eine, nur von diesem Bereiche abhängende Folge von Polynomen zu finden, so daß *jede analytische Funktion, die sich in dem gegebenen Bereiche regulär verhält, dort in eine, nach diesen Polynomen fortschreitende Reihe entwickelbar ist.* Er hat auch mit Hilfe konformer Abbildung des Außengebietes von D eine Lösung dieser Aufgabe gegeben[1]).

Herr Fejér hat neuerdings im Zusammenhange mit seinen Untersuchungen über Interpolation auch eine allgemeine Lösung dieses Problems gegeben, indem er für die Wurzeln der Polynome, nach denen die Entwickelung fortschreitet, eine einfache Vorschrift angibt[2]).

Vorliegende Arbeit entstand aus einem Versuch, die Fabersche Frage auf eine neue Weise zu lösen. Es sei der Einfachheit halber die Begrenzung von D ein einziger regulär-analytischer Kurvenzug C; ich betrachte die Polynome

$$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

($P_n(x)$ ist vom n-ten Grade und sein höchster Koeffizient ist reell und

[1]) Über polynomische Entwickelungen [Mathematische Annalen, **57** (1903), S. 389 bis 408]; ferner: Über polynomische Entwickelungen II. [Mathematische Annalen, **64** (1907), S. 116–135]. — Im Falle einer Ellipse hat Picard dieselbe Aufgabe gelöst. S. Traité d'analyse, Zweite Auflage, Paris 1905 (Gauthiers-Villars), **2**, S. 317. — Man vgl. auch Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Zweite Auflage, Berlin 1878–81 (G. Reimer), **1**, S. 198.

[2]) Interpolation und konforme Abbildung (Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1918, S. 319–331). Man vgl. insbesondere § 5.

itiv), welche durch die Kurve C und durch die folgende Orthogonalitäts-enschaft eindeutig bestimmt sind:

$$\frac{1}{l}\int_C P_m(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \varepsilon_{mn},$$

h. 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$; ezeichnet hier die Länge, $d\sigma$ das Bogenelement der Kurve C[3]).

Die Polynome $P_n(x)$, welche ich im folgenden als die *„zur Kurve C örigen orthogonalen Polynome"* bezeichnen möchte, besitzen mehrere eressante Eigenschaften. Unter anderen genügen sie auch der Faberschen rderung: *Jede, in dem gegebenen Bereiche D reguläre analytische Funk-n $F(x)$ kann in eine, nach den orthogonalen Polynomen fortschreitende ihe entwickelt werden*:

$$F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

e *Koeffizienten dieser Entwickelung lassen sich sogar einfach auf die urier sche Weise durch die Formeln*

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sdrücken.

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$P_n(x) = x^n;$$

n hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^m \bar{x}^n\,d\theta = \varepsilon_{mn} \quad (x = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

e orthogonalen Polynome sind demnach Verallgemeinerungen der ganz-ligen Potenzen von x; die Entwickelung nach diesen Polynomen ist nentsprechend eine Verallgemeinerung der Potenzreihe. Es gibt, wie sehen werden, eine ganze Reihe von Eigenschaften, die das eben inierte Polynom $P_n(x)$ mit x^n teilt, wie denn auch die Entwickelung h diesen Polynomen die größte Analogie mit der Potenzreihe aufweist.

In dem Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $1, 1)$ ist (entstanden durch die Verflachung einer Ellipse mit den Brenn-kten $-1, 1)$, reduziert sich $P_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten tor) auf das n-te Legendresche Polynom.

Das I. Kapitel dieser Arbeit enthält die Definition und die allgemeinen genschaften der orthogonalen Polynome $P_n(x)$. Das II. und III. Kapitel handeln den merkwürdigen Zusammenhang, in welchem diese Polynome

[3]) $\bar{a}$ bezeichnet die zu a konjugiert komplexe Größe.

mit jenen Funktionen stehen, welche eine *schlichte* Abbildung des Innen- bzw. Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises der z-Ebene vermitteln.

Im II. Kapitel erhalte ich namentlich mit Hilfe der zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome für die Funktion $\gamma(x)$, welche das *Innere* der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z|<1$ schlicht abbildet, die folgende *Darstellung*:

$$z=\gamma(x)=\varepsilon\frac{2\pi}{l}\frac{1}{K(a,a)}\int_a^x (K(a,\xi))^2\,d\xi.$$

Hier ist

$$K(a,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_n(a)}P_n(x),$$

eine Reihe, die absolut und gleichmäßig konvergiert. wenn a und x im Innern von C liegen[4]); ε bezeichnet hier eine beliebige Konstante mit dem absoluten Betrage 1, a ist ein beliebiger Punkt im Innern von C, welchem der Mittelpunkt des Einheitskreises, d. h. $z=0$ entspricht. Die Integration ist auf eine beliebige Kurve zu erstrecken, die von a nach x führt und ganz im Innern von C verläuft.

Im III. Kapitel behandle ich dann den Zusammenhang der orthogonalen Polynome mit der konformen Abbildung des *Außengebietes*. Zu diesem Zwecke bestimme ich zunächst einen *asymptotischen Ausdruck* von $P_n(x)$, der außerhalb von C gilt (§ 11). Bezeichnet nämlich $z=\psi(x)$ die Funktion, welche eine schlichte Abbildung des Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z|>1$ vermittelt, während die Punkte $x=\infty$ und $z=\infty$ einander entsprechen (diese Funktion ist abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1 eindeutig bestimmt), so ist

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_0^{n+\frac{1}{2}}\frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n}=\sqrt{\frac{l}{2\pi}}\sqrt{\psi'(x)},$$

wo ε_0 eine durch $\psi(x)$ völlig bestimmte Konstante mit dem absoluten Betrage 1 bezeichnet und x irgendein Punkt außerhalb von C ist. Daraus ergibt sich unmittelbar eine *Bestimmung der abbildenden Funktion* $\psi(x)$ durch die Polynome $P_n(x)$. Es ist nämlich einfach

$$z=\psi(x)=\varepsilon_0\lim_{n=\infty}\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$$

[4]) Ich sage im folgenden, daß eine Reihe in einem Gebiete gleichmäßig konvergiert, wenn sie in jedem abgeschlossenen Bereiche, welcher ganz im Innern dieses Gebietes liegt, gleichmäßig konvergiert.

ür alle x, welche außerhalb von C liegen. Die abbildende Funktion rscheint somit im wesentlichen als Grenzwert des rationalen Quotienten

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}.$$

Dieser asymptotische Ausdruck gestattet auch den wahren Konvergenzbereich der Entwickelung einer analytischen Funktion $F(x)$ nach den $P_n(x)$ festzustellen (§ 12). Dieser Konvergenzbereich wird durch ein *Kreisbild* begrenzt. Die Kreisbilder C_R der x-Ebene sind eine Schar von doppelpunktlosen, geschlossenen Kurven, welche bei der konformen Abbildung des Außengebietes der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| > 1$ den konzentrischen Kreisen $|z| = R > 1$ der z-Ebene entsprechen. *Die Entwickelung nach orthogonalen Polynomen*

$$F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

$$\left(c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma;\ n = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

konvergiert nun *absolut und gleichmäßig im Innern des größten Kreisbildes* C_{R_0} $(R_0 > 1)$, *welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von* $F(x)$ *enthält, und stellt dort* $F(x)$ *dar; die Entwickelung divergiert ferner für alle* x *außerhalb von* C_{R_0}. *Es ist*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R_0}.$$

Ist z. B. C der Einheitskreis, so sind die Kreisbilder konzentrische Kreise mit den Radien > 1. In dem Grenzfalle ferner, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, sind die Kreisbilder homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$. Der obige Satz über die Konvergenz der Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen ist in diesen beiden Fällen wohlbekannt.

Mit diesen Mitteln können wir auch eine neue Lösung des Problems der *konvergenten Interpolation* gewinnen (§ 14). Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C; *ich wähle als Interpolationsstellen die Wurzeln der orthogonalen Polynome*[5]). Dann konvergieren die gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolationspolynome, die an diesen Stellen mit $F(x)$ übereinstimmen, im Innern von C_{R_0} gleichmäßig und stellen dort $F(x)$ dar; C_{R_0} bezeichnet hier, wie oben, das größte Kreisbild, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(x)$ enthält. In den oben angeführten speziellen Fällen ist dieser Satz wohlbekannt. Ist nämlich C der Einheitskreis, so sind diese Interpolations-

[5]) Die Menge dieser Wurzeln hat keinen Häufungspunkt außerhalb von C (§ 13).

polynome identisch mit den Abschnitten der Taylorschen Entwickelung um den Nullpunkt; ist ferner C das Intervall $(-1, 1)$, so ist diese Interpolation mit der sog. Gaußschen Interpolation identisch, deren Stellen bekanntlich Wurzeln der Legendreschen Polynome sind.

Die Resultate des I. Kapitels gelten nicht nur dann, wenn die Kurve C durchgängig analytisch ist, sondern auch dann, wenn sie *bloß stetig, geschlossen und doppelpunktlos* ist; sie gelten sogar (mit Ausnahme von Satz VI) auch im entarteten Falle des Intervalls. Im II. und III. Kapitel beschränke ich mich hingegen meist auf analytische Kurven.

Die Resultate des I. Kapitels können unmittelbar auf gewisse Polynome $Q_n(x)$ verallgemeinert werden, die folgendermaßen definiert sind:

Es sei $f(\xi)$ eine auf der Kurve C definierte stetige und *positive* Funktion. Ich betrachte eine Folge von Polynomen

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$$

($Q_n(x)$ ist vom n-ten Grade und sein höchster Koeffizient ist reell und positiv) mit der folgenden charakteristischen Eigenschaft:

$$\frac{1}{l}\int_C f(\xi) Q_m(\xi)\overline{Q_n(\xi)}\, d\sigma = \varepsilon_{mn},$$

d. h. 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$. Die Funktionen

$$\sqrt{f(\xi)}\, Q_n(\xi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bilden somit ein normiertes Orthogonalsystem.

Ist z. B. $f(\xi) = 1$, so ist

$$Q_n(x) = P_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist $f(\xi)$ positiv und stetig, sonst aber beliebig, und ist C der Einheitskreis, so sind die $Q_n(x)$ mit gewissen Polynomen identisch, welche ich in meiner Arbeit „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen“[6]) untersucht habe.

Ist $f(\xi)$ positiv und stetig, sonst aber beliebig und ist C das Intervall $(-1, 1)$, so sind die $Q_n(x)$ mit gewissen Polynomen identisch, welche in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche eine wichtige Rolle spielen. (Sie sind die Näherungsnenner gewisser Kettenbrüche.)[7])

Die Resultate des II. Kapitels können auch auf die Polynome $Q_n(x)$ verallgemeinert werden.

---

[6]) Erste Mitteilung, [Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), S. 167–202]; zweite Mitteilung ist im Erscheinen begriffen.

[7]) S. etwa O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913 (B. G. Teubner), S. 379.

In einer späteren Arbeit möchte ich die Theorie der Toeplitzschen ɔrmen (die sich auf den Kreis beziehen)[8]) auf beliebige Kurven übertagen. Ist nämlich $f(\xi)$ eine auf der analytischen Kurve C definierte reelle d stetige Funktion, so kann man die folgende Schar von Hermiteschen ɔrmen der Variablen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ bilden:

$$H_n(f;t)=\frac{1}{l}\int_C f(\xi)\,|\,t_0+t_1\xi+\ldots+t_n\xi^n\,|^2 d\sigma \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

h betrachte die n-te dieser Formen unter der Nebenbedingung

$$H_n(1;t)=\frac{1}{l}\int_C |\,t_0+t_1\xi+\ldots+t_n\xi^n\,|^2 d\sigma=1$$

d bezeichne die „Eigenwerte", d. h. die Wurzeln der Determinante der ɔrm

$$H_n(f-\mu;t)=\frac{1}{l}\int_C (f(\xi)-\mu)\,|\,t_0+t_1\xi+\ldots+t_n\xi^n\,|^2 d\sigma$$

t

$$\mu_0^{(n)},\ \mu_1^{(n)},\ \ldots,\ \mu_n^{(n)}.$$

ınn ist

$$m\leqq\mu_\nu^{(n)}\leqq M \quad (\nu=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots),$$

ɛnn m und M das Minimum bzw. Maximum von $f(\xi)$ auf der Kurve C zeichnen. Die Eigenwerte $\mu_\nu^{(n)}$ sind ferner „im Durchschnitt"[9]) gleich n Werten von $f(\xi)$ in denjenigen Punkten von C, welche bei der konɔmen Abbildung des Außengebietes von C auf das Äußere des Einheitseises, in die äquidistanten Punkte des Einheitskreises übergehen[10]).

---

[8]) S. etwa a. a. O. [6]). Ebenda möchte ich die Resultate des III. Kapitels auf die ynome $Q_n(x)$ übertragen.

[9]) Die reellen Zahlen

$$\left\{x_\nu^{(n)}\right\} \text{ und } \left\{y_\nu^{(n)}\right\} \quad (\nu=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots)$$

d „im Durchschnitt" gleich, wenn:

a) beide Mengen beschränkt sind

b) für jede stetige Funktion $F(\alpha)$ die Gleichung gilt:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\left(F(x_\nu^{(n)})-F(y_\nu^{(n)})\right)=0.$$

[10]) Diese Punktgruppen spielen in den Untersuchungen des Herrn Fejér über erpolation eine kardinale Rolle. Vgl. a. a. O. [2]), wo sie als regelmäßig verteilte nkte bezeichnet sind.

Inhalt.

I. Kapitel. Definition und allgemeine Eigenschaften der orthogonalen Polynome.

§ 1. Definition der orthogonalen Polynome.
§ 2. Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.
§ 3. Über eine Extremum-Aufgabe.
§ 4. Über die Wurzeln der Polynome $P_n(x)$ und über die Tschebyscheffschen Polynome.
§ 5. Über die Wurzeln der Polynome $K_n(a, x)$.

II. Kapitel. Über die konforme Abbildung des Innengebietes.

§ 6. Darstellung der abbildenden Funktion im Innern von C.
§ 7. Bemerkungen.

III. Kapitel. Über die konforme Abbildung des Außengebietes.

§ 8. Hilfssätze.
§ 9. Über die Tschebyscheffschen Polynome.
§ 10. Ein Grenzwertsatz über die Determinanten D_n.
§ 11. Über einen asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome.
§ 12. Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.
§ 13. Über die Wurzeln der orthogonalen Polynome.
§ 14. Anwendung auf Interpolation.

I. Kapitel.

Definition und allgemeine Eigenschaften der orthogonalen Polynome.

§ 1.

Definition der orthogonalen Polynome.

1. Es sei C eine stetige, doppelpunktlose und geschlossene rektifizierbare Kurve in der komplexen x-Ebene. Ist $f(\xi)$ eine auf C definierte Funktion, so verstehe ich unter dem Integral

$$\int_C f(\xi)\, d\sigma,$$

ie gewöhnlich, den Grenzwert

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} f(x_\nu) |\xi_\nu - \xi_{\nu-1}|;$$

$\xi_1, \ldots, \xi_m$ sind hier der Reihe nach gewisse Punkte auf C, für welche

$$\lim_{m=\infty} \operatorname*{Max}_{0 \leqq \nu \leqq m} |\xi_\nu - \xi_{\nu-1}| = 0 \qquad (\xi_{-1} = \xi_m)$$

t und x_ν einen beliebigen Punkt von C bezeichnet, der zwischen $\xi_{\nu-1}$ nd ξ_ν liegt. Man hat offenbar

$$\int_C d\sigma = l,$$

o l die Länge von C bezeichnet.

2. Die Veranlassung zu meinen Untersuchungen gab die folgende Minimum-Aufgabe:

Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C; elches ist das Polynom n-ten Grades $S_n(x)$, für welches das Integral

$$\frac{1}{l} \int_C |F(\xi) - S_n(\xi)|^2 d\sigma$$

en kleinsten Wert hat?

Ich bezeichne dieses Polynom mit $s_n(x)$; Existenz und Eindeutigkeit esselben folgt nach bekannten Schlußweisen, etwa nach den Regeln der ifferentialrechnung[11]). Ich behaupte nun, daß das Polynom n-ten Grades

$$s_n(x) - s_{n-1}(x),$$

on einem konstanten Faktor abgesehen, von $F(x)$ *unabhängig* ist, einzig nd allein von der Kurve C und von n abhängt und durch folgende rthogonalitätseigenschaft zu charakterisieren ist:

$$\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\, \bar{\xi}^\nu\, d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)^{12}).$$

---

[11]) Die Aufgabe ist äquivalent mit dem Aufsuchen des Minimums der Hermiteschen Form:

$$\frac{1}{l} \int_C |t_0 F(\xi) + t_1 + t_2 \xi + \ldots + t_{n+1} \xi^n|^2 d\sigma$$

ter der Nebenbedingung $t_0 = 1$. Es gibt bekanntlich ein einziges Wertsystem der ariabeln t_ν, für welches dies eintritt.

[12]) Durch diese n Bedingungen ist ein Polynom n-ten Grades (abgesehen von em konstanten Faktor) eindeutig bestimmt.

In der Tat, aus der Minimumeigenschaft von $s_n(x)$ folgt für alle $\alpha \neq 0$ und für $0 \leqq \nu \leqq n$ die Ungleichung:

$$\frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi) - \alpha\xi^\nu|^2 d\sigma > \frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma.$$

Also ist

$$2\Re\frac{\bar\alpha}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma + \frac{|\alpha|^2}{l}\int_C |\xi|^{2\nu} d\sigma > 0\ ^{13}).$$

Nun kann aber eine Ungleichung

$$2\Re\bar\alpha q + |\alpha|^2 p > 0 \qquad (p > 0)$$

nur dann für alle $\alpha \neq 0$ bestehen, wenn $q = 0$ ist, d. h.

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ähnlich folgt für $n \geqq 1$

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1).$$

Also ergibt sich

$$\frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_{n-1}(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma -$$

$$-\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_n(\xi))\bar\xi^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

w. z. b. w.

Ich wende dieses Resultat auf die Funktion $F(x) = x^n$ $(n \geqq 1)$ an. Dann ist offenbar

$$s_n(x) = x^n,$$

also

$$F(x) - s_{n-1}(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x);$$

es gilt somit der Satz:

Es ist für alle Polynome n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma$$

---

[13]) $\Re x$ bezeichnet den reellen Teil der komplexen Größe x.

ann und nur dann ein Minimum, wenn $A_n(x)$ die Orthogonalitäts-igenschaft

$$\frac{1}{l}\int_C A_n(\xi)\bar{\xi}^\nu d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

esitzt.

3. Ausgehend von diesen Ergebnissen definiere ich jetzt ein Ortho-onalsystem von Polynomen

$$P_0(x),\ P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

it den folgenden Eigenschaften:

a) $P_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades.

b) Der höchste Koeffizient von $P_n(x)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{l}\int_C P_m(\xi)\,\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \varepsilon_{mn} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

ch bezeichne die $P_n(x)$ als *die zur Kurve C gehörigen orthogonalen olynome.* Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Systems ist ach dem bekannten Satz von E. Schmidt über die Orthogonalisierung ines gegebenen Funktionensystems a priori klar. Die Polynome $P_n(x)$ önnen auch einfach dargestellt werden, und zwar auf folgende Weise.

Es sei

$$h_{pq} = \frac{1}{l}\int_C \xi^p \bar{\xi}^q d\sigma,$$

nn ist

$$h_{pq} = \overline{h_{qp}} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

nd die Hermiteschen Formen

$$H_n(1; t) = \sum_{p,q=0}^{n} h_{pq}\, t_p \bar{t}_q = \frac{1}{l}\int_C |t_0 + t_1\xi + \ldots + t_n\xi^n|^2 d\sigma$$

nd für alle n positiv definit. Ich bezeichne die Determinante dieser orm mit D_n, dann ist also

$$D_n > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

an hat z. B.

$$D_0 = h_{00} = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} & \ldots & h_{0n} \\ h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n0} & h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

Ich behaupte nun, daß für $n \geqq 1$

$$P_n(x) = \alpha_n \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \ldots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \ldots & h_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \ldots & h_{n,n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} = \alpha_n D_{n-1} x^n + \ldots$$

ist, wo α_n eine später zu bestimmende Konstante bezeichnet. In der Tat ist

$$\frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\bar{\xi}^\nu d\sigma = \alpha_n \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \dots & h_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \dots & h_{n,n-1} \\ h_{0\nu} & h_{1\nu} & \dots & h_{n\nu} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n-1; \\ \alpha_n D_n & \text{für } \nu = n. \end{cases}$$

Die Normierung von $P_n(x)$ (d. h. die Bestimmung von α_n) erfolgt durch die Bedingung b) und durch die Bedingung

$$\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2 d\sigma = 1.$$

Es ist somit $\alpha_n > 0$ und man hat

$$\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2 d\sigma = \alpha_n D_{n-1} \frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\bar{\xi}^n d\sigma = \alpha_n^2 D_{n-1} D_n;$$

es muß also

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}}$$ [14])

sein, d. h.

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} \\ h_{01} & h_{11} & \dots & h_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{0,n-1} & h_{1,n-1} & \dots & h_{n,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; P_0(x) = 1).$$

4. Aus dieser Formel ergibt sich leicht eine andere Darstellung von $P_n(x)$. Es gilt nämlich der

Hilfssatz. *Sind A_{pq} beliebige reelle oder komplexe Größen, dann gilt die Identität:*

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{10} & \dots & A_{n0} \\ A_{01} & A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{0,n-1} & A_{1,n-1} & \dots & A_{n,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} = |A_{pq}x - A_{p+1,q}|_0^{n-1}$$ [15]).

[14]) Die Wurzeln aus positiven Größen sind hier und im folgenden stets positiv zu nehmen.

[15]) Ich bezeichne mit

$$|a_{pq}|_0^{n-1}$$

eine Determinante n-ter Ordnung mit den Elementen a_{pq} $(p, q = 0, 1, \dots, n-1)$

Ich beweise diese Gleichung etwa mit dem folgenden Verfahren. Ich ldiere die $-x$-fache n-te (d. h. vorletzte) Spalte der Determinante auf r linken Seite zur $n+1$-ten (d. h. letzten) Spalte derselben, weiter die x-fache $n-1$-te Spalte zur n-ten, usw. Es ergibt sich auf diese Weise hließlich eine Determinante, deren letzte Reihe mit Ausnahme ihres ersten lementes aus lauter Nullen besteht. Daraus folgt leicht die Behauptung.

Ich setze hier $A_{pq} = h_{pq}$; es ist also

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \left| h_{pq} x - h_{p+1,q} \right|_0^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; P_0(x) = 1).$$

as Polynom $P_n(x)$ ist somit für $n \geqq 1$ abgesehen von einem konstanten aktor gleich der Determinante der Hermiteschen Form

$$H_{n-1}(x - \cdot\,; t) = \frac{1}{i} \int_C (x - \xi) \left| t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_{n-1} \xi^{n-1} \right|^2 d\sigma$$

$$= \sum_{p,q=0}^{n-1} (h_{pq} x - h_{p+1,q}) t_p \bar{t}_q .$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist

$$h_{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{p+q+1} & \text{für gerade } p+q \\ 0 & \text{für ungerade } p+q \end{cases} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

nd

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, X_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

o $X_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet. Die Determinanten- rm; in welcher jetzt ganz allgemein die orthogonalen Polynome erscheinen, in diesem Falle wohlbekannt.

Ist C der Einheitskreis, so ist

nd

$$h_{pq} = \varepsilon_{pq} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$P_n(x) = x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

§ 2.

ntwickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.

5. Mit Heranziehung des Begriffs der orthogonalen Polynome können r jetzt die Ergebnisse von **2.** in der folgenden Form aussprechen:

Satz 1. *Es sei $F(x)$ im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär- alytisch; es gibt dann eine ganz bestimmte nach den orthogonalen Poly- men fortschreitende Entwickelung*

$$c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

deren aufeinanderfolgende Abschnitte

$$s_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x)$$

für alle n folgende Minimum-Eigenschaft besitzen: Das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - S_n(\xi)|^2 d\sigma$$

ist für alle Polynome n-ten Grades $S_n(x)$ dann und nur dann minimal, wenn $S_n(x) = s_n(x)$ ist. Dieses Minimum ist gleich

$$\sigma_n = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma - |c_0|^2 - |c_1|^2 - \ldots - |c_n|^2.$$

Die Koeffizienten der obigen Entwickelung ergeben sich auf die Fouriersche Weise durch die Formeln

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der erste Teil dieses Satzes wurde bereits in **2.** bewiesen. Es war nämlich für $n \geqq 1$

$$\frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\,\xi^\nu\, d\sigma = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n-1),$$

d. h.

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) = c_n P_n(x),$$

wo c_n eine von $F(x)$ abhängige Konstante bezeichnet. Die Auswertung von c_n erfolgt auf folgende Weise:

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - s_{n-1}(\xi))\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_C s_n(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{l}\int_C (s_n(\xi) - F(\xi))\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma,$$

also nach **2.**

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma.$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - s_0(\xi))\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - c_0)\, d\sigma = 0,$$

d. h.

$$c_0 = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\, d\sigma,$$ w. z. b. w.

Es ist somit

$$\sigma_n = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma + \frac{1}{l}\int_C |s_n(\xi)|^2 d\sigma$$

$$-2\Re\frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{s_n(\xi)}\,d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma - |c_0|^2 - |c_1|^2 - \ldots - |c_n|^2.$$

mit ist Satz I in allen Teilen bewiesen.

Es gilt ferner der

Satz II. *Es ist für alle Polynome n-ten Grades von der Form*

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma$$

n und nur dann minimal, wenn

$$A_n(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}\,P_n(x) = \mu_n P_n(x)$$

Das Minimum ist gleich $\frac{D_n}{D_{n-1}} = \mu_n^2$.

Es ist nämlich nach 3.

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\,x^n + \ldots.$$

6. Die Polynome $s_n(x)$, d. h. die Abschnitte der obigen Entwickelung, ern somit im Sinne der kleinsten Quadrate unter allen Polynomen selben Grades die beste Approximation für $F(x)$[16]). Ähnlich ist $P_n(x)$ ch die im Satz II ausgesprochene Minimumeigenschaft ausgezeichnet. dem speziellen bzw. Grenzfalle, wo C der Einheitskreis bzw. das doppelt durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, sind diese Sätze wohlbekannt. besondere Satz I drückt dann eine Grundeigenschaft der Potenzreihe '. der nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Entwickelung aus.

Die obige Entwickelung hat vorläufig nur eine rein formelle Bedeu- g. Ich bringe dies mit der Bezeichnung

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

Ausdruck; dies ist lediglich ein abkürzendes Symbol für das Bestehen Formeln

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[16]) Vgl. die Fußnote [21]).

7. Satz I gestattet einige, im wesentlichen bekannte Schlüsse zu ziehen. Aus der Formel von σ_n folgt zunächst die „Besselsche Ungleichung"

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 \leqq \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma$$

und also die Konvergenz der Reihe

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots .$$

Man kann die Frage stellen, ob das Orthogonalsystem der Polynome $P_n(x)$ vollständig ist, in dem Sinne, daß es keine, im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytische und nicht identisch verschwindende Funktion $F_0(x)$ gibt, für welche

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{l}\int_C F_0(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wäre. Dies wird sofort klar, wenn ich für jedes $F(x)$ die Gleichung

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma,$$

oder was damit gleichwertig ist,

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$$

beweise. Man hat nun nach einem bekannten Satz aus der Theorie der analytischen Funktionen für geeignete Polynome $P(x)$

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

und zwar gleichmäßig im abgeschlossenen Innenbereich von C, wo ε eine gegebene positive Größe bezeichnet[17]). Dann ist aber

$$\frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - P(\xi)|^2 d\sigma < \varepsilon^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz III. *Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots .$$

Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l}\int_C |F(\xi) - s_n(\xi)|^2 d\sigma = 0,$$

[17]) D. Hilbert, Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen Rationalen fortschreitende Reihe [Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1897, S. 63–70].

nn $s_n(x)$ die n-te Partialsumme dieser Entwickelung bezeichnet; es t ferner die „Parsevalsche Formel“

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots = \frac{1}{l}\int_C |F(\xi)|^2 d\sigma.$$

Das Orthogonalsystem der Polynome $P_n(x)$ besitzt somit die Vollndigkeitseigenschaft.

8. Ich beweise nun den folgenden

Hilfssatz. *Sind die analytischen Funktionen $F_n(x)$ im abgeschlossenen nen- (Außen-) bereich von C regulär und*

$$\lim_{n=\infty} \int_C |F_n(\xi)|\, d\sigma = 0,$$

nn ist im Innern (außerhalb) von C gleichmäßig[18])

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = 0.$$

Dieser Satz ist eine einfache Folge des Cauchyschen Integralsatzes. nämlich x innerhalb (außerhalb) von C, so ist

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_n(\xi)}{\xi - x}\, d\xi,$$

o

$$|F_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{F_n(\xi)}{\xi - x}\right| d\sigma \leqq \frac{1}{2\pi\delta}\int_C |F_n(\xi)|\, d\sigma,$$

nn δ die minimale Entfernung von x von den Punkten der Kurve C zeichnet. Daraus folgt die Behauptung.

Dieser Hilfssatz wird im folgenden mehrmals benützt. Es sei hier

$$F_n(x) = \frac{(F(x) - s_n(x))^2}{l},$$

nn ergibt sich der

Satz IV. *Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenreich von C und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots.$$

nn konvergiert diese Entwickelung gleichmäßig im Innern von C und llt dort $F(x)$ dar.

Eine wesentliche Ergänzung dieses Satzes werde ich in § 12 beweisen.

---

[18]) Vgl. die Fußnote [4]).

§ 3.

Über eine Extremum-Aufgabe.

9. Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich von C und

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

Der n-te Abschnitt dieser Entwickelung ist in der folgenden Form zu schreiben:

$$s_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) =$$
$$= \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\left(\overline{P_0(\xi)}\, P_0(x) + \overline{P_1(\xi)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(\xi)}\, P_n(x)\right) d\sigma.$$

Der „Kern" dieses Integralausdruckes ist

$$K_n(\xi, x) = \overline{P_0(\xi)}\, P_0(x) + \overline{P_1(\xi)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(\xi)}\, P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades von $\bar{\xi}$ und x; man hat ferner

$$K_n(\xi, x) = \overline{K_n(x, \xi)}.$$

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$K_n(\xi, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{\xi}^{\nu} x^{\nu} = \frac{1 - (\bar{\xi} x)^{n+1}}{1 - \bar{\xi} x}.$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist bekanntlich

$$K_n(\xi, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} X_\nu(\bar{\xi})\, X_\nu(x) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{X_n(\bar{\xi})\, X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{\xi})\, X_n(x)}{x - \bar{\xi}},$$

wo $X_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet.

10. Ähnlich wie $P_n(x)$ [19]) ist auch die Funktion $K_n(\xi, x)$ dadurch ausgezeichnet, daß sie die Lösung einer Extremum-Aufgabe liefert. Es gilt nämlich der

Satz V. *Es sei a beliebig und $G_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades von der Eigenschaft*

$$\frac{1}{l}\int_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = 1.$$

Dann ist das Maximum von $|G_n(a)|^2$

$$\operatorname{Max} |G_n(a)|^2 = K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2.$$

Dies wird für die Polynome

$$G_n(x) = \varepsilon \frac{K_n(a, x)}{\sqrt{K_n(a, a)}}$$

[19]) Vgl. Satz II.

nd nur für diese) erreicht, wo ε eine beliebige Konstante mit dem soluten Betrage 1 bezeichnet.

In der Tat sei

$$G_n(x) = t_0 P_0(x) + t_1 P_1(x) + \ldots + t_n P_n(x),$$

nn ist

$$\frac{1}{l}\int_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = |t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2;$$

e Aufgabe ist somit das Maximum von

$$|t_0 P_0(a) + t_1 P_1(a) + \ldots + t_n P_n(a)|^2$$

bestimmen, während

$$|t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2 = 1$$

. Dies ist aber nach der Schwarzschen Ungleichheit gleich

$$|P_0(a)|^2 + |P_1(a)|^2 + \ldots + |P_n(a)|^2 = K_n(a, a)$$

d es wird für

$$t_\nu = \varepsilon \frac{\overline{P_\nu(a)}}{\sqrt{K_n(a, a)}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ |\varepsilon| = 1)$$

eicht, w. z. b. w.

Daraus folgt der

Satz V'. *Es ist für alle Polynome n-ten Grades $\Gamma_n(x)$ mit der genschaft $\Gamma_n(a) = 1$ das Integral*

$$\frac{1}{l}\int_C |\Gamma_n(\xi)|^2 d\sigma$$

nn und nur dann minimal, wenn

$$\Gamma_n(x) = \frac{K_n(a, x)}{K_n(a, a)}$$

. *Das Minimum ist gleich* $\frac{1}{K_n(a, a)}$

11. Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich n C und a sei im Innern von C. Dann ist nach **8.**

$$|F(a)| \leqq \frac{1}{2\pi\delta}\int_C |F(\xi)|\, d\sigma,$$

nn δ die minimale Entfernung zwischen a und den Punkten von C be-chnet. Ich setze hier $F(x) = (G_n(x))^2$, wo $G_n(x)$ irgendein Polynom ten Grades mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{l}\int_C |G_n(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

bezeichnet. Dann ist

$$|G_n(a)|^2 \leqq \frac{l}{2\pi\delta}$$

und also nach Satz V

$$\operatorname{Max} |G_n(a)|^2 = K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2 \leqq \frac{l}{2\pi\delta}$$

und zwar für alle n. Daraus folgt der

Satz VI. *Die Reihensumme*

$$K(a, a) = |P_0(a)|^2 + |P_1(a)|^2 + \ldots + |P_n(a)|^2 + \ldots$$

ist stets endlich, wenn a im Innern von C liegt. Sie stellt die genaue obere Grenze von $|G(a)|^2$ dar, während $G(x)$ die Gesamtheit der im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär-analytischen Funktionen mit der Bedingung

$$\frac{1}{l}\int_C |G(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

durchläuft.

Die Reihe

$$K(a, x) = \overline{P_0(a)}\, P_0(x) + \overline{P_1(a)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\, P_n(x) + \ldots$$

ist absolut und gleichmäßig konvergent, wenn a und x im Innern von C liegen, und stellt dort eine reguläre analytische Funktion von $\bar{a}$ und x dar. Es ist

$$K(a, x) = \overline{K(x, a)}.$$

Der zweite Teil dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichheit. Die Berechnung der Reihensumme $K(a, x)$ folgt erst in § 6. Vgl. über die Summe $K(a, x)$ auch § 12, 44.

Ist C der Einheitskreis, so sind die Reihen

$$K(a, a) = 1 + |a|^2 + \ldots + |a|^{2n} + \ldots$$

bzw.

$$K(a, x) = 1 + \bar{a}x + \ldots + \bar{a}^n x^n + \ldots$$

für $|a| < 1$, $|x| < 1$ konvergent.

§ 4.

Über die Wurzeln der Polynome $P_n(x)$ und über die Tschebyscheffschen Polynome.

12. Es sei $n \geqq 1$ und x_0 eine Wurzel von $P_n(x)$. Dann ist

$$\frac{P_n(x)}{x - x_0}$$

n Polynom $n-1$-ten Grades, also nach der Grundeigenschaft der orthonalen Polynome

$$\frac{1}{l}\int_C P_n(\xi)\frac{\overline{P_n(\xi)}}{\xi - x_0}\,d\sigma = \frac{1}{l}\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 (\xi - x_0)\,d\sigma = 0,$$

h.

$$x_0 = \frac{\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 \xi\,d\sigma}{\int_C \left|\frac{P_n(\xi)}{\xi - x_0}\right|^2 d\sigma}$$

raus folgt der

Satz VII. *Die Wurzeln der zur Kurve C gehörigen orthogonalen olynome $P_n(x)$ liegen alle innerhalb des kleinsten konvexen, abgehlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$, welcher die Kurve C enthält.*

Nähere Feststellungen über die Lage dieser Wurzeln erfolgen in § 13.

Ist C der Einheitskreis, so liegen die Wurzeln von $P_n(x) = x^n$ alle Nullpunkt.

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist $P_n(x)$ (abgesehen von einem nstanten Faktor) das n-te Legendresche Polynom; die Wurzeln desben liegen alle in der Tat im Intervalle $(-1, 1)$.

13. Herr Fejér hat mir eine Beweismethode mitgeteilt, welche nicht r den Satz VII erledigt, sondern auch ermöglicht, analoge Sätze über e Wurzeln anderer wichtiger Polynome abzuleiten.

Der Beweis stützt sich auf die folgende merkwürdige Auffassung des einsten konvexen, abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$, welcher eine Kurve C thält:

$\mathfrak{B}$ besteht aus denjenigen Punkten der Ebene (und nur aus jenen), n welchen aus es unmöglich ist, sich gleichzeitig allen Punkten von C nähern.

Liegt nämlich x im Innern von $\mathfrak{B}$ und ist x' irgendeine neue Lage n x, so lege man durch x eine Gerade, welche senkrecht zu dem Vektor $-x$ liegt. Dann ist geometrisch klar, daß x' von allen Punkten von C, elche nicht in derselben Halbebene liegen wie x', weiter entfernt ist x. Auch im Falle, wo x am Rande von $\mathfrak{B}$ liegt, läßt sich leicht igen, daß keine Verschiebung von x in x' möglich ist, durch welche an sich allen Punkten der Kurve C simultan nähern würde.

Ist aber x außerhalb von $\mathfrak{B}$, so gibt es immer eine Verschiebung n geeigneter Richtung und Größe, durch welche man gleichzeitig allen nkten von C näher kommt. Man lege etwa durch x irgendeine Gerade, elche keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ gemein hat. Dann ist klar, daß man durch

eine Verschiebung, welche senkrecht zu dieser Geraden gerichtet und genügend klein ist, gleichzeitig allen Punkten von C näher kommt.

Es gilt nun der allgemeine Satz:

Ist k positiv und $A_n^{(k)}(x)$ das Polynom, welches unter allen Polynomen n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

für das Integral

$$\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^k d\sigma$$

den kleinsten Wert liefert, so liegen die Wurzeln von $A_n^{(k)}(x)$ in dem kleinsten konvexen Bereiche $\mathfrak{R}$, welcher die Kurve C enthält.

Würde nämlich eine Wurzel von $A_n^{(k)}(x)$, etwa x_1, außerhalb von $\mathfrak{R}$ liegen, so setze ich das Polynom

$$\frac{A_n^{(k)}(x)}{x - x_1}(x - x_1')$$

an, wo x_1' eine solche Stelle bezeichnet, für welche

$$\left|\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right| < 1$$

ist, während ξ die Punkte von C durchläuft. Daraus folgt aus Stetigkeitsgründen, daß sogar

$$\left|\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right| \leqq \vartheta < 1$$

ist, d. h.

$$\frac{1}{l}\int_C \left| A_n^{(k)}(\xi)\frac{\xi - x_1'}{\xi - x_1}\right|^k d\sigma \leqq \vartheta^k \frac{1}{l}\int_C |A_n^{(k)}(\xi)|^k d\sigma < \frac{1}{l}\int_C |A_n^{(k)}(\xi)|^k d\sigma,$$

was der Definition von $A_n^{(k)}(x)$ offenbar widerspricht.

Es ist nach Satz II

$$A_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}\, P_n(x);$$

daraus folgt somit ein neuer Beweis für Satz VII.

Ist C der Einheitskreis, so ist für alle k

$$A_n^{(k)}(x) = x^n \text{ [20]}.$$

[20]) Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n|^k d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 + \bar{a}_1 x + \ldots + \bar{a}_n x^n|^k d\theta \qquad (x = e^{i\theta})$$

und wenn

$$B(x) = 1 + \bar{a}_1 x + \ldots + \bar{a}_n x^n$$

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

14. Man kann die folgende Frage stellen:

Es sei $A_n(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

nd das Maximum von $|A_n(x)|$ auf C

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)| = M.$$

elches ist dann das Polynom n-ten Grades von der obigen Form, für elches M minimal ist?

Ich bezeichne dieses Polynom als das zu der Kurve C gehörige n-te schebyscheffsche Polynom $T_n(x)$. Es sei das Maximum von $T_n(x)$ uf C gleich m_n, dann ist also für *jedes* Polynom $A_n(x)$ irgendwo auf C

$$|A_n(x)| \geqq m_n.^{21})$$

---

r $|x| < 1$ von 0 verschieden ist, dann ist offenbar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|^k \, d\theta \geqq |B(0)|^k = 1.$$

[21]) Existenz und Unität dieser Polynome folgt aus gewissen Sätzen von Tonelli. gl. I polinomi d' approssimazione di Tschebychev [Annali di matematica, **XV** 908), S. 47–119] S. 108. — Vgl. auch P. Montel, Leçons sur les séries de poly- mes a une variable complexe, Paris 1910 (Gauthiers-Villars), S. 66–71, sowie Faber, Journal für Mathematik, **150** (1919), S. 79–106.

Ich bemerke hier, daß diese Polynome in gewissem Sinne Gegenstücke der ortho- nalen Polynome sind. Man kann nämlich ganz allgemein unter der Abweichung (écart) r analytischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf der Kurve C folgendes verstehen:

)
$$\sqrt{\frac{1}{l}\int_C |f(\xi) - g(\xi)|^2 \, d\sigma},$$

es ist die Abweichung im Sinne der kleinsten Quadrate, oder im Besselschen Sinne.

)
$$\operatorname*{Max}_{(C)} |f(x) - g(x)|,$$

es ist die Abweichung im Tschebyscheffschen Sinne (die zweite ist offenbar ößer als die erste). Satz II sagt nun aus, daß unter den Polynomen n-ten Grades n der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

sjenige, welches von 0 im Besselschen Sinne möglichst wenig abweicht, folgen- s ist:

$$A_n(x) = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}} P_n(x)$$

d man hat

$$\mu_n = \operatorname{Min} \sqrt{\frac{1}{l}\int_C |A_n(\xi)|^2 \, d\sigma} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}.$$

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

Ist z. B. $n = 1$ und $T_1(x) = x - \alpha$, dann ist offenbar α der Mittelpunkt, m_1 der Radius des kleinsten Kreises, welcher die Kurve C völlig überdeckt.

Ist C der Einheitskreis, so ist

$$T_n(x) = x^n; \quad m_n = 1.$$

Ist C das Intervall $(-1, 1)$, so ist bekanntlich

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n}; \quad m_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$ [22])

Es gilt nun der Fejérsche Satz:

Die Wurzeln der zur Kurve C gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $T_n(x)$ liegen alle im kleinsten konvexen Bereiche $\mathfrak{R}$, welcher die Kurve C enthält.

Die hier gegebene Definition sagt anderseits, daß

$$A_n(x) = T_n(x)$$

das Polynom ist, welches von 0 im Tschebyscheffschen Sinne möglichst wenig abweicht. Man hat

$$\operatorname*{Min}_{(C)} \operatorname{Max} |A_n(x)| = m_n.$$

Es ist also

$$\mu_n = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}} \leqq m_n.$$

Die Benennung „Tschebyscheffsche Polynom“ hat übrigens bei Tonelli eine erweiterte Bedeutung. So bezeichnet er nämlich das Polynom n-ten Grades $K_n(x)$, welches von einer gegebenen analytischen Funktion $F(x)$ auf der Kurve C im Tschebyscheffschen Sinne möglichst wenig abweicht. Ist $F(x) = x^n$, so ist offenbar

$$F(x) - K_{n-1}(x) = T_n(x),$$

wenn $T_n(x)$ das oben definierte, zu der Kurve C gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom bezeichnet.

[22]) Herr Faber hat a. a. O. [21]) S. 84–86 bewiesen, daß die Tschebyscheffschen Polynome dieselben sind, wenn C eine Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$ ist. Es seien a und b $(a > b)$ die Halbachsen dieser Ellipse und R durch die Bedingungen

$$a = \frac{R + \frac{1}{R}}{2}, \qquad b = \frac{R - \frac{1}{R}}{2} \qquad (R > 1)$$

bestimmt, so ist dann

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} \quad \text{und} \quad m_n = \frac{R^n + \frac{1}{R^n}}{2^n} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{a-b}{2}\right)^n.$$

Ist $b = 0$, d. h. $R = 1$, so reduziert sich der letzte Ausdruck auf den im Texte angegebenen.

Würde nämlich eine Wurzel, etwa x_1, des Tschebyscheffschen Po-
noms $T_n(x)$ außerhalb von $\mathfrak{K}$ liegen, so bilde ich das Polynom

$$T_n^*(x) = \frac{T_n(x)}{x - x_1}(x - x_1'),$$

x_1' die gleiche Bedeutung hat wie oben. Dann ist aber

$$\underset{(C)}{\text{Max}} |T_n^*(x)| = \underset{(C)}{\text{Max}} |T_n(x)| \left|\frac{x - x_1'}{x - x_1}\right| \leqq \vartheta m_n < m_n,$$

s der Definition von $T_n(x)$ widerspricht. Daraus folgt der Satz.
Auf diese Polynome will ich noch später zurückkommen (man vgl. § 9).

§ 5.

Über die Wurzeln der Polynome $K_n(a, x)$.

15. Der Zweck dieses Paragraphen ist die Lage der Wurzeln von

$$K_n(a, x) = \overline{P_0(a)} P_0(x) + \overline{P_1(a)} P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)} P_n(x)$$

tzustellen. Es gilt zunächt für jedes Polynom n-ten Grades $R_n(x)$ die
r $K_n(a, x)$ charakteristische) Gleichung

$$\frac{1}{l}\int_C \overline{K_n(a, \xi)}\, R_n(\xi)\, d\sigma = R_n(a).$$

der Tat sei

$$R_n(x) = t_0 P_0(x) + t_1 P_1(x) + \ldots + t_n P_n(x),$$

nn ist nach der Grundeigenschaft der orthogonalen Polynome

$$\frac{1}{l}\int_C \overline{K_n(a, \xi)}\, R_n(\xi)\, d\sigma = P_0(a) t_0 + P_1(a) t_1 + \ldots + P_n(a) t_n = R_n(a),$$

z. b. w.

Es sei nun a fest und x_0 eine Wurzel von $K_n(a, x)$; dann ist zu-
chst $x_0 \neq a$, weil ja

$$K_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{n} |P_\nu(a)|^2 \geqq |P_0(a)|^2 = 1$$

. Ich setze in der obigen Formel

$$R_n(x) = \frac{K_n(a, x)}{x - x_0}(x - a),$$

nn ist also

$$\frac{1}{l}\int_C |K_n(a, \xi)|^2 \frac{\xi - a}{\xi - x_0}\, d\sigma = 0.$$

s dieser Gleichung ist es ersichtlich, daß die Vektoren, welche vom
llpunkt ausgehend die Zahlen

$$\frac{\xi - a}{\xi - x_0}$$

darstellen, nicht durchwegs in einen Winkelraum von der Öffnung $< \pi$ hineinfallen können, während ξ die Kurve C durchläuft.

Was hat dies für eine geometrische Bedeutung? Das Argument dieser komplexen Zahlen ist offenbar der Winkel zwischen den Strahlen ξa und ξx_0; es müssen also zwei Punkte ξ', ξ'' auf C geben, für welche

$$\sphericalangle a \xi' x_0 - \sphericalangle a \xi'' x_0 = \pi$$

ist. Die Punkte a, x_0, ξ', ξ'' bestimmen dann ein Kreisviereck, dessen gegenüberliegende Ecken ξ' und ξ'' sind.

Die Wurzeln von $K_n(a, x)$ haben also stets die folgende Eigenschaft: *Es ist $x_0 \neq a$ und man kann immer durch a und x_0 einen Kreis schlagen, welcher mit C wenigstens zwei solche Punkte gemein hat, die auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie $a x_0$ liegen.* Dadurch ist für die Wurzeln x_0 von $K_n(a, x)$ ein Bereich der x-Ebene festgelegt.

16. Herr Fejér hat eine merkwürdige Verallgemeinerung des kleinsten konvexen, die Kurve C enthaltenden Bereiches gegeben, die eine geometrische Charakterisierung des soeben definierten Wurzelbereiches gestattet.

Es sei a ein beliebiger Punkt in der komplexen x-Ebene, liege aber nicht auf der Kurve C. Die Transformation durch reziproke Radien

$$x' = \frac{1}{x - a}, \quad x = a + \frac{1}{x'}$$

bildet die Kurve C der x-Ebene auf eine Kurve C' der x'-Ebene ab. Ich bilde nun den kleinsten (im gewöhnlichen Sinne) konvexen Bereich $\mathfrak{K}'$, welcher die Bildkurve C' enthält. Dann entspricht durch die obige Abbildung dem Bereiche $\mathfrak{K}'$ der x'-Ebene wieder ein ganz bestimmter Bereich $\mathfrak{K}_a$ in der komplexen x-Ebene und dies ist der von Herrn Fejér definierte Bereich, welcher durch C und a vollständig bestimmt ist.

Man kann den eben definierten Bereich $\mathfrak{K}_a$ etwa mit Hilfe der folgenden Vorschrift konstruieren. Es seien ξ' und ξ'' beliebige Punkte von C, die voneinander und von a verschieden sind. Man schlage durch die Punkte a, ξ', ξ'' einen Kreis *und nehme die Punkte desjenigen Kreisbogens $\overset{\frown}{\xi', \xi''}$, welcher a nicht enthält. Die Gesamtheit dieser, von den Kreisbögen $\overset{\frown}{\xi', \xi''}$ beschriebenen Punkte der Ebene, während ξ' und ξ'' unabhängig voneinander die Kurve C durchlaufen, ist der Bereich $\mathfrak{K}_a$*[23]).

[23]) Dies folgt aus dem Umstande, daß bei der obigen Transformation Kreise (Ceraden) in Kreise übergehen. Liegt a auf der Kurve C, so wende ich eine ähnliche Konstruktion an und rechne den Punkt a auch zu $\mathfrak{K}_a$.

Ist a außerhalb von C, so enthält $\mathfrak{K}_a$ stets den abgeschlossenen Innenbereich von C; ist aber a im Innern von C, so kann dies niemals der Fall sein, da dann z. B. eine genügend kleine Umgebung von a nicht zu $\mathfrak{K}_a$ gehört.

Ist a außerhalb von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}_a$ stets ein endlicher Bereich. Ist a im Innern von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}_a$ ein unendlicher Bereich.

Ist a im Unendlichen, so ist der Fejérsche Bereich $\mathfrak{K}_a$ identisch t $\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$, wie oben, den kleinsten konvexen Bereich bezeichnet, wel- er die Kurve C enthält.

Das Folgende ist nun geometrisch klar: *$\mathfrak{K}_a$ besteht aus solchen nkten x (und nur aus solchen), welche so beschaffen sind, daß man rch a und x immer einen Kreis schlagen kann, welcher mit der urve C wenigstens zwei solche Punkte gemein hat, die auf entgegen- etzten Seiten der geraden Linie ax liegen.*

Es gilt somit der

Satz VIII. *Die Wurzeln des Polynoms*

$$K_n(a,x) = \overline{P_0(a)}\,P_0(x) + P_1(a)\,P_1(x) + \ldots + P_n(a)\,P_n(x)$$

gen alle im oben definierten Bereiche $\mathfrak{K}_a$[24]).

17. Herr Fejér hat diesen Satz mit Hilfe der Transformation durch iproke Radien erhalten. Mit derselben Methode erhält man auch die genden Sätze:

Es sei k eine beliebige positive Zahl; ich betrachte die Gesamtheit r Polynome n-ten Grades $U_n(x)$, für welche $U_n(a) = 1$ ist. Mit $u_n^{(k)}(x)$ eichne ich dasjenige unter diesen Polynomen, für welches

$$\frac{1}{l}\int_C |U_n(\xi)|^k\, d\sigma$$

nimal ist. Dann liegen sämtliche Wurzeln von $u_n^{(k)}(x)$ in dem Be- che $\mathfrak{K}_a$.

Es ist offenbar

$$u_n^{(2)}(x) = \frac{K_n(a,x)}{K_n(a,a)}.$$

Ferner:

Bezeichne ich mit $u_n(x)$ dasjenige unter den Polynomen n-ten ades $U_n(x)$ mit der Nebenbedingung $U_n(a) = 1$, für welches

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |U_n(x)|$$

nimal ist. Dann liegen sämtliche Wurzeln von $u_n(x)$ in dem Be- che $\mathfrak{K}_a$.

18. Es sei C der Einheitskreis. Liegt a im Innern von C, so ist offenbar der abgeschlossene Außenbereich von C; ist a außerhalb von so ist $\mathfrak{K}_a$ der abgeschlossene Innenbereich von C. Liegt endlich a C, so besteht $\mathfrak{K}_a$ aus sämtlichen Punkten von C.

---

[24]) Daraus folgt leicht ein neuer Beweis von Satz VII. Vgl. 18.

Man hat in diesem Falle

$$K_n(a, x) = \frac{1-(\bar{a}x)^{n+1}}{1-\bar{a}x},$$

so daß, in diesem speziellen Falle, Satz VIII leicht zu bestätigen ist.

Es sei C das Intervall $(-1, 1)$. Ist a nicht reell, so ist geometrisch klar, daß der Bereich $\mathfrak{K}_a$ folgendermaßen zu gewinnen ist. Man schlage durch die Punkte a, -1, 1 einen Kreis, dessen Fläche von der Strecke $(-1, 1)$ in zwei Segmente zerlegt wird. $\mathfrak{K}_a$ ist dann dasjenige dieser Segmente, welches den Punkt a nicht enthält. Sämtliche Wurzeln des Polynoms

$$K_n(a, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} X_\nu(\bar{a}) X_\nu(x) = \frac{n+1}{2} \frac{X_n(\bar{a}) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{a}) X_n(x)}{x-\bar{a}}$$

liegen also nach Satz VIII in diesem Segmente; $X_n(x)$ bezeichnet hier das n-te Legendresche Polynom.

Ist a reell und $|a| \geqq 1$, so ist $\mathfrak{K}_a$ das Intervall $(-1, 1)$. Ist a reell und $|a| < 1$, so ist $\mathfrak{K}_a$ die ganze reelle Achse. Die Wurzeln des Polynoms

$$X_n(a) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(a) X_n(x)$$

sind also sämtlich reell, sobald a reell ist; ist hierbei $|a| \geqq 1$, so liegen sie sogar im Intervalle $(-1, 1)$.

Im Grenzfalle, wo der imaginäre Teil von a ins Unendliche rückt, geht das Segment $\mathfrak{K}_a$ in das Intervall $(-1, 1)$ über. Es ist ferner

$$\lim_{a=\infty} \frac{X_n(\bar{a}) X_{n+1}(x) - X_{n+1}(\bar{a}) X_n(x)}{\bar{a}^{n+1}} = c X_n(x) \qquad (c \neq 0),$$

so daß wir auf diese Weise den bekannten Satz über die Wurzeln der Legendreschen Polynome herausbekommen.

II. Kapitel.

Über die konforme Abbildung des Innengebietes.

§ 6.

Darstellung der abbildenden Funktion im Innern von C.

19. Es sei C eine geschlossene und doppeltpunktlose analytische Kurve in der komplexen x-Ebene. Dann gibt es nach der Theorie der konformen Abbildung eine Funktion

$$z = \gamma(x),$$

welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Gebiet

< 1 der z-Ebene abbildet, während der Nullpunkt einem gegebenen nkte $x = a$ im Innern von C entspricht. D. h.

$$\gamma(a) = 0.$$

rch diese Forderung ist $\gamma(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor t dem absoluten Betrage 1) eindeutig bestimmt. Aus der Voraus- zung, daß C eine analytische Kurve ist, folgt dann, daß $\gamma(x)$ auch in em größeren, die Kurve C in seinem Innern enthaltenden Gebiete ulär und schlicht ist[35]).

Es gibt bekanntlich immer eine und nur eine Funktion

$$x = g(z),$$

lche für $|z| \leqq 1$ regulär und schlicht ist und die Umkehrung der igen Abbildung liefert. Man hat, wenn x und z zugehörige Werte eichnen,

$$\gamma'(x)\, g'(z) = 1;$$

ist also

$$\gamma'(x) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad g'(z) \neq 0.$$

er bezeichnen x und z beliebige Stellen im abgeschlossenen Innenbereich n C bzw. im Bereiche $|z| \leqq 1$.

Die im I. Kapitel definierten orthogonalen Polynome gestatten nun e merkwürdige Darstellung der abbildenden Funktion $\gamma(x)$. Es gilt der

Satz IX. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen Ebene und $\gamma(x)$ bezeichne eine Funktion, welche das Innere der urve C der x-Ebene schlicht auf das Gebiet $|z| < 1$ der z-Ebene ab- det, während der Nullpunkt $z = 0$ einem gegebenen Punkte $x = a$ im nern von C entspricht; dann ist im Innern von C*

$$\gamma(x) = \varepsilon \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K(a,a)} \int_a^x (K(a,\xi))^2\, d\xi,$$

ε eine Konstante mit dem absoluten Betrage 1, l die Länge von C und

$$K(a,x) = \overline{P_0(a)}\, P_0(x) + \overline{P_1(a)}\, P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}\, P_n(x) + \ldots$$

$P_n(x)$ bezeichnet hier das zur Kurve C gehörige n-te orthogonale lynom. (Die Reihe $K(a,x)$ konvergiert nach Satz VI immer, wenn m Innern von C liegt.)

20. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf den folgenden einfachen

Hilfssatz. *Es sei $K(z)$ eine analytische Funktion, welche für $\leqq 1$ regulär und von 0 verschieden ist. Ich betrachte die Gesamt-*

[35]) Vgl. etwa Picard, Traité d'analyse, 2. Auflage, Paris 1905 (Gauthiers-lars) 2, S. 301—307.

heit der analytischen Funktionen $E(z)$, die für $|z| \leqq 1$ regulär sind und der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(z)E(z)|^2 d\theta = 1 \qquad (z = e^{i\theta})$$

genügen. Es sei endlich a_0 fest und $|a_0| < 1$; dann ist das Maximum von $|E(a_0)|^2$

$$\operatorname{Max} |E(a_0)|^2 = \frac{1}{1-|a_0|^2}\frac{1}{|K(a_0)|^2}.$$

Ich setze

$$K(z)E(z) = t_0 + t_1 z + \ldots + t_n z^n + \ldots;$$

dann ist laut der obigen Voraussetzung

$$|t_0|^2 + |t_1|^2 + \ldots + |t_n|^2 + \ldots = 1,$$

also mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichheit

$$|E(a_0)|^2 \leqq \frac{1}{|K(a_0)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}|t_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty}|a_0|^{2n} = \frac{1}{1-|a_0|^2}\frac{1}{|K(a_0)|^2}.$$

(Dieses Maximum wird dann und nur dann erreicht, wenn für alle n

$$t_n = c\bar{a}_0^n,$$

d. h. wenn

$$K(z)E(z) = \frac{c}{1-\bar{a}_0 z}$$

ist. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-\bar{a}_0 z|^2} = \frac{1}{1-|a_0|^2} \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Daraus folgt somit

$$|c| = \sqrt{1-|a_0|^2}$$

und also

$$E(z) = \varepsilon\frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\bar{a}_0 z}\frac{1}{K(z)} \qquad (|\varepsilon| = 1).$$

21. Für $a_0 = 0$ liefert dieser Hilfssatz den folgenden:

A. *Es sei $K(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär-analytisch und von 0 verschieden; ich betrachte sämtliche analytische Funktionen $E(z)$, welche für $|z| \leqq 1$ regulär sind und der Bedingung*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K(z)E(z)|^2 d\theta = 1 \qquad (z = e^{i\theta})$$

genügen. Dann ist

$$\operatorname{Max}|E(0)|^2 = \frac{1}{|K(0)|^2}.$$

Ferner gilt

B. *Es sei a ein gegebener Punkt im Innern der Kurve C. Ich trachte sämtliche analytische Funktionen $G(x)$, welche im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär sind und der Bedingung*

$$\frac{1}{l}\int_C |G(\xi)|^2 d\sigma = 1$$

nügen. Dann ist

$$\operatorname{Max} |G(a)|^2 = K(a,a),$$

$K(a,x)$ die obige Bedeutung hat[26]).

Diese Sätze liefern die Lösungen je einer Extremum-Aufgabe, welche h auf die Funktionenklassen $E(z)$ bzw. $G(x)$ beziehen. Ich setze n in A.

$$K(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l} g'(z)}\ ^{27}),$$

$g(z)$ die Abbildung liefernde Funktion in **19.** ist. Es sei ferner

$$E(z) = E(\gamma(x)) = G(x)$$

d also

$$G(x) = G(g(z)) = E(z).$$

ann sind $E(z)$ und $G(x)$ gleichzeitig regulär. Man hat ferner auf C

$$d\sigma = |g'(e^{i\theta})|\, d\theta = \frac{d\theta}{|\gamma'(\xi)|} \qquad (\xi = g(e^{i\theta})),$$

so

$$\int_0^{2\pi} |K(z)E(z)|^2 d\theta = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} |g'(z)|\,|E(z)|^2 d\theta = \frac{1}{l}\int_C |G(\xi)|^2 d\sigma \qquad (z = e^{i\theta}).$$

ist endlich

$$E(0) = G(a),$$

daß

$$\operatorname{Max} |E(0)|^2 = \operatorname{Max} |G(a)|^2,$$

h.

$$K(a,a) = \frac{1}{|K(0)|^2} = \frac{l}{2\pi}\frac{1}{|g'(0)|} = \frac{l}{2\pi}|\gamma'(a)|.$$

22. Nach diesen Vorbereitungen bilde ich das Integral

$$J_n = \frac{1}{l}\int_C |K_n(a,\xi) - \lambda\sqrt{\gamma'(\xi)}|^2 d\sigma,$$

---

[26]) Vgl. Satz VI.

[27]) Es ist $g'(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$; ein jeder Zweig von $\sqrt{g'(z)}$ ist also dort ulär-analytisch. Ähnliches gilt für $\sqrt{\gamma'(x)}$ im abgeschlossenen Innenbereich von C.

wo $K_n(a, x)$ die obige Bedeutung hat[28]) und λ eine später zu bestimmende Konstante bezeichnet. Man hat

$$\frac{1}{l}\int_C |K_n(a,\xi)|^2 d\sigma = K_n(a,a),$$

ferner

$$\frac{1}{l}\int_C |\gamma'(\xi)|\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{l};$$

es ist endlich

$$\frac{1}{l}\int_C K_n(a,\xi)\overline{\sqrt{\gamma'(\xi)}}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} K_n(a,g(z))\frac{|g'(z)|}{\overline{\sqrt{g'(z)}}} d\theta$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} K_n(a,g(z))\sqrt{g'(z)}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Nun ist die Funktion von z

$$K_n(a, g(z))\sqrt{g'(z)}$$

regulär-analytisch für $|z| \leqq 1$; das letzte Integral ist somit gleich

$$\frac{2\pi}{l} K_n(a, g(0))\sqrt{g'(0)} = \frac{2\pi}{l}\frac{K_n(a,a)}{\sqrt{\gamma'(a)}}\ ^{29}).$$

D. h.

$$J_n = K_n(a,a) - 2\Re\lambda\frac{2\pi}{l}\frac{K_n(a,a)}{\sqrt{\gamma'(a)}} + |\lambda|^2\frac{2\pi}{l}.$$

Ich setze hier

$$\lambda = \frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}},$$

dann folgt

$$J_n = \frac{l}{2\pi}|\gamma'(a)| - K_n(a,a),$$

d. h. nach dem obigen Resultate

$$\lim_{n=\infty} J_n = \frac{l}{2\pi}|\gamma'(a)| - K(a,a) = 0.$$

---

[28]) Vgl. § 8.

[29]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = f(0).$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = f(\infty).$$

so

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l} \int_C \left| K_n(a, \xi) - \frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(\xi)} \right|^2 d\sigma = 0.$$

e Funktion unter dem Zeichen des absoluten Betrages ist aber regulär-alytisch, wenn ξ im abgeschlossenen Innenbereich von C liegt. Daraus gt nach dem Hilfssatz in 8., daß

$$\lim_{n=\infty} K_n(a, x) = K(a, x) = \frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(x)}$$

für alle x, welche im Innern von C liegen. Man hat ferner

$$K(a, a) = \frac{l}{2\pi} |\gamma'(a)|,$$

daß

$$\frac{(K(a, x))^2}{K(a, a)} = \frac{\overline{\gamma'(a)}}{|\gamma'(a)|} \frac{l}{2\pi} \gamma'(x),$$

raus die obige Darstellung von $\gamma(x)$ folgt[30]).

§ 7.

Bemerkungen.

23. Ich bemerke, daß der obige Beweis die *Existenz* der abbildenden nktion $\gamma(x)$ voraussetzt; er liefert also kein Existenztheorem für $\gamma(x)$, ndern gibt lediglich eine neue Darstellung derselben.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß man mit Hilfe von Satz IX e abbildende Funktion $\gamma(x)$ unmittelbar durch Polynome annähern kann. h setze nämlich

$$\gamma_n(x) = \varepsilon \frac{2\pi}{l} \frac{1}{K_n(a, a)} \int_a^x (K_n(a, \xi))^2 d\xi;$$

es ist ein Polynom $2n+1$-ten Grades, dessen Auswertung keine prin-piellen Schwierigkeiten aufweist. Man hat nun im Innern von C

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n(x) = \gamma(x).$$

Es sei z. B. C der Einheitskreis, dann ist

$$P_n(x) = x^n,$$

so

$$K(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}^n x^n = \frac{1}{1 - \bar{a}x}.$$

[30]) Eine andere Darstellung von $\gamma(x)$ werde ich in § 11 geben.

Man erhält somit

$$\gamma(x) = \varepsilon(1-|a|^2)\int_a^x \frac{d\xi}{(1-\bar{a}\xi)^2} = \varepsilon\frac{x-a}{1-\bar{a}x} \qquad (|\varepsilon|=1),$$

ein bekanntes Resultat.

24. Ich bezeichne jetzt die obige Funktion $\gamma(x)$ mit $\gamma(a;x)$, d. h. $\gamma(a;x)$ sei die Funktion, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene abbildet und der Bedingung

$$\gamma(a;a) = 0$$

genügt. Es sei a_0 ein beliebiger, aber fester Punkt im Innern von C, so vermittelt die Funktion

$$\frac{\gamma(a_0;x)-\gamma(a_0;a)}{1-\overline{\gamma(a_0;a)}\gamma(a_0;x)}$$

ebenfalls eine schlichte Abbildung des Inneren der Kurve C auf das Innere des Einheitskreises, während $x=a$ in $z=0$ übergeht. Sie muß also (abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) mit $\gamma(a;x)$ übereinstimmen, d. h.

$$\gamma(a;x) = \eta\frac{\gamma(a_0;x)-\gamma(a_0;a)}{1-\overline{\gamma(a_0;a)}\gamma(a_0;x)} \qquad (|\eta|=1).$$

Daraus folgt

$$|\gamma'(a;a)| = \frac{|\gamma'(a_0;a)|}{1-|\gamma(a_0;a)|^2}\ ^{31}),$$

also

$$K(a,a) = \frac{l}{2\pi}\frac{|\gamma'(a_0;a)|}{1-|\gamma(a_0;a)|^2}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß $K(a,a)$ *im Innern von* C *nicht beschränkt bleibt.*

25. Satz IX gestattet eine Antwort auf die in Satz VI offen gelassene Frage über die Bedeutung von $K(a,x)$ zu geben. Es ist nämlich

$$|\gamma'(a)| = \frac{1}{|g'(0)|} = \frac{2\pi}{l}K(a,a)$$

das Vergrößerungsverhältnis (oder die Verzerrung) der Abbildung im Punkte $x=a$; ferner

$$K(a,x) = \frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\sqrt{\gamma'(x)}.$$

26. Man kann auch (wie es in der Theorie der konformen Abbildungen üblich ist) die folgende Frage stellen:

Welche ist die Funktion, welche das Innere der Kurve C *der* x*-Ebene schlicht auf das Innere eines Kreises der* z*-Ebene abbildet, während ein*

[31]) $\gamma'(a;x)$ ist die Ableitung nach x.

gebener Punkt a im Innern von C dem Mittelpunkt des Kreises entricht und das Vergrößerungsverhältnis im Punkte a gleich 1 ist?

Diese Funktion ist

$$\gamma^*(x) = \frac{\varepsilon}{(K(a,a))^2} \int_a^x (K(a,\xi))^2 \, d\xi \qquad (|\varepsilon| = 1),$$

h.

$$\gamma^*(x) = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a,a)} \gamma(x).$$

raus folgt, daß der Radius dieses Kreises

$$R(a) = \frac{l}{2\pi} \frac{1}{K(a,a)}$$

Nähert sich a der Kurve C, so ist nach dem vorstehenden

$$\lim R(a) = 0,$$

h. das Bild von C schrumpft zu einem Punkte zusammen. Das Bild n C ist dann am größten, wenn die Summe

$$K(a,a) = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(a)|^2$$

nimal ist. Ist z. B. C der Einheitskreis, so tritt dies für $a = 0$ ein.

III. Kapitel.

Über die konforme Abbildung des Außengebietes.

§ 8.

Hilfssätze.

27. Der Zweck dieses Kapitels ist den Zusammenhang der orthogonalen lynome mit der Theorie der konformen Abbildung weiter zu unterchen.

Es sei C eine geschlossene und doppelpunktlose analytische Kurve in r komplexen x-Ebene. Dann gibt es nach der Theorie der konformen bildung eine Funktion

$$z = \psi(x),$$

lche daß Äußere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das Äußere des nheitskreises der z-Ebene abbildet, während die Punkte $x = \infty$ und $z = \infty$ ander entsprechen. Diese Funktion ist (abgesehen von einem konstanten ktor mit dem absoluten Betrage 1) eindeutig bestimmt.

Ich bezeichne die inverse Funktion von $z = \psi(x)$ mit

$$x = \varphi(z).$$

Dann ist, wenn x und z zugehörige Werte bezeichnen,

$$\psi'(x)\varphi'(z) = 1;$$

es ist also außerhalb von C bzw. für $|z| > 1$

$$\psi'(x) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi'(z) \neq 0.$$

Die Funktion $\varphi(z)$ hat dabei die folgende Form

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \cdots + \frac{\tau_n}{z^n} + \cdots \qquad (\tau \neq 0),$$

wo der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \zeta^n$$

größer als 1 ist.

Aus der Voraussetzung, daß C eine analytische Kurve ist, folgt bekanntlich die Existenz einer Zahl ϱ $(0 < \varrho < 1)$ von der Eigenschaft, daß die Funktion $x = \varphi(z)$ nicht nur das Gebiet $|z| > 1$, sondern sogar das Gebiet $|z| > \varrho$ schlicht auf das Äußere einer Kurve C_ϱ abbildet, welche ganz im Innern von C verläuft. Dann konvergiert die obige Entwickelung für $|z| > \varrho$. Es ist ferner $\varphi'(z) \neq 0$ für $|z| > \varrho$ und $\psi'(x) \neq 0$, wenn x außerhalb von C_ϱ liegt.

Diese Abbildung überführt die konzentrischen Kreise mit den Radien $R > \varrho$ der z-Ebene in eine Schar von Kurven C_R der x-Ebene, welche ich *Kreisbilder* nennen will. Es ist offenbar $C_1 = C$ und wenn $\varrho < R' < R''$ ist, so ist $C_{R'}$ ganz im Innern von $C_{R''}$ enthalten.

Ist C der Einheitskreis, so ist $\varphi(z) = z$ und die Kreisbilder sind konzentrische Kreise.

Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ ist, hat man

$$\varphi(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

und also

$$z = \psi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1};$$

C_1 ist in diesem Falle das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ und die Kreisbilder C_R $(R > 1)$ sind homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$.

§ 9.

Über die Tschebyscheffschen Polynome.

28. In **14.** habe ich die Tschebyscheffschen Polynome definiert; ich komme jetzt wieder auf diese Polynome zurück, da sie für unsere

iteren Ziele von entscheidender Bedeutung sind. Ich zitiere den von rrn Faber herrührenden

Satz X. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen Ebene und $T_n(x)$ das zugehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom; sei ferner das Maximum von $|T_n(x)|$ auf C*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |T_n(x)| = m_n.$$

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots \qquad (\tau \neq 0)$$

ne Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der urve C abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entrechen, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 1.$$

Ist also $|\tau| > 1$, so hat man

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty.$$

Ist $|\tau| = 1$, so ist

$$\lim_{n=\infty} m_n = 1,$$

nd ist endlich $|\tau| < 1$, so hat man

$$\lim_{n=\infty} m_n = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine analytische urve C, daß es Polynome

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

bt, für welche die Abweichung von 0 auf der Kurve C (im Tschebyscheffhen Sinne)[32]*, d. h. daß*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)|$$

liebig klein werden kann, ist somit die, daß $|\tau| < 1$ ist[33]*.*

---

[32]) Vgl. die Fußnote [21]).

[33]) Faber a. a. O. [21]) S. 86–88, Diese notwendige und hinreichende Bedingung lt auch dann, wenn C nicht analytisch, sondern eine beliebige stetige und doppelnktlose Kurve ist. (Die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 1$$

indessen in diesem Falle nicht allgemein gültig. Vgl. 31.)

(Fortsetzung der Fußnote auf der nächsten Seite.)

Ich beweise hier diesen Satz mit einer Methode, die auch bei Satz XI zum Ziele führen wird. Es ist zunächst für jedes Polynom von der obigen Form

$$A_n(x) = (\varphi(z))^n + a_1(\varphi(z))^{n-1} + \ldots + a_n = \tau^n z^n r(z) \quad (x = \varphi(z)),$$

wo $r(z)$ für $|z| \geqq 1$ regulär und $r(\infty) = 1$ ist. Also

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)| = |\tau|^n \operatorname*{Max}_{|z| \geqq 1} |r(z)| \geqq |\tau|^n \text{ [34]},$$

d. h.

$$m_n \geqq |\tau|^n.$$

Ich will anderseits Polynome von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

bilden, für welche

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |A_n(x)| = |\tau|^n (1 + o(1)) \text{ [35]}$$

Ist C eine geradlinige Strecke von der Länge l, so ist

$$|\tau| = \frac{l}{4};$$

es ist also dann und nur dann $\lim_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $l < 4$ ist.

Ist C ein Kreisbogen vom Radius R und mit dem Winkel φ, so ist

$$|\tau| = R \sin \frac{\varphi}{4};$$

es ist also dann und nur dann $\lim_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $R \sin \frac{\varphi}{4} < 1$ ist.

Ist z. B. C ein Halbkreis ($\varphi = \pi$), so muß $R < \sqrt{2}$ sein.

Ist C ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit der Sehne h und mit dem Winkel $2k\pi$ ($k < 1$), so ist

$$|\tau| = \frac{h}{4} \frac{1}{1-k};$$

es ist also dann und nur dann $\lim_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $\frac{h}{1-k} < 4$ ist.

Ist C eine Halbkreisfläche (begrenzt durch einen Halbkreis und einen Durchmesser von der Länge $2R$), so ist

$$|\tau| = \frac{4R}{3\sqrt{3}};$$

es ist also dann und nur dann $\lim_{n=\infty} m_n = 0$, wenn $R < \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ist.

[34]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| \geqq |f(0)|.$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| \geqq |f(\infty)|.$$

[35]) Ich bezeichne mit $O(a_n)$ und $o(a_n)$ eine Größe, die durch a_n dividiert, mit wachsendem n beschränkt bleibt, bzw. nach 0 konvergiert.

. Aus diesen zwei Ergebnissen folgt offenbar der Satz X. Zu diesem vecke brauche ich aber einen Hilfssatz, welcher im nächsten Abschnitt dar-legt wird.

29. Hilfssatz. *Es sei* $0 < r < 1$ *und*

$$M(u) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{u} + \ldots + \frac{\alpha_n}{u^n} + \ldots$$

i regulär für $|u| \geqq r$; *ich setze*

$$u_\nu^{(n)} = r e^{i\nu \frac{2\pi}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

ann ist bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)})}{n} = \alpha_0.$$

s ist aber sogar

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + o(1).$$

In der Tat hat man

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + \frac{n\alpha_n}{r^n} + \frac{n\alpha_{2n}}{r^{2n}} + \ldots;$$

ist aber

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < r,$$

daß

$$\alpha_n = O(\vartheta^n r^n),$$

$0 < \vartheta < 1$ und ϑ von n unabhängig ist. Man hat also

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + O(n\vartheta^n),$$

raus die Behauptung folgt. Es ist sogar für jedes k

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = n\alpha_0 + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Es ist klar, daß diese ganze Schlußweise ihre Richtigkeit auch dann behält, wenn die Koeffizienten α_n Funktionen einer Veränderlichen z d, welche für $|z| \geqq r$ regulär bleiben und der Bedingung $\alpha_n = O(\vartheta^n r^n)$, $0 < \vartheta < 1$ und ϑ von z und n unabhängig ist, gleichmäßig genügen [36]). e Konvergenz findet dann für $|z| \geqq r$ gleichmäßig statt.

---

[36]) Dies wird offenbar stets erfüllt, sobald die Funktion von zwei Variabeln $u) = M(u, z)$ für $|u| \geqq r$, $|z| \geqq r$ regulär ist. Man hat nämlich

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int M(u, z)\, u^{n-1}\, du,$$

die Integration über einen Kreis $|u| = \vartheta r$ $(0 < \vartheta < 1)$ zu erstrecken ist. Nun ist

$$M(u, z) = O(1)$$

zwar gleichmäßig für $|u| \geqq \vartheta r$ und $|z| \geqq r$. Also

$$\alpha_n = O(\vartheta^n r^n).$$

30. Es sei nun $\varrho < r < 1$, wo ϱ die gleiche Bedeutung hat, wie in **27.** Die Funktion $\varphi(u)$ ist dann regulär und schlicht für $|u| \geqq r$. Ich betrachte die folgenden Punkte in der komplexen x-Ebene

$$v_1^{(n)} = \varphi(u_1^{(n)}),\ v_2^{(n)} = \varphi(u_2^{(n)}),\ \ldots,\ v_n^{(n)} = \varphi(u_n^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $u_\nu^{(n)}$ die obige Bedeutung hat. Diese Punkte liegen alle auf dem Kreisbilde C_r, d. h. im Innern von C. Ich bilde das Polynom n-ten Grades

$$\omega_n(x) = (x - v_1^{(n)})(x - v_2^{(n)}) \ldots (x - v_n^{(n)})\ ^{37}),$$

welches offenbar die Form $\omega_n(x) = x^n + \ldots$ hat. Ich behaupte dann, daß

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |\omega_n(x)| = |\tau|^n (1 + o(1))$$

ist, d. h. die Polynome $\omega_n(x)$ genügen der in **28.** gestellten Forderung.

Ich setze nämlich im vorigen Hilfssatz

$$M(u) = M(u, z) = \log \frac{\varphi(u) - \varphi(z)}{u - z}.$$

Diese Funktion ist regulär für $|u| \geqq r$, $|z| \geqq r$, da wegen der Schlichtheit $\varphi(u) \neq \varphi(z)$, wenn $u \neq z$ ist; sie ist auch im Unendlichen regulär, da

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \tau + \frac{\tau_0}{z} + \frac{\tau_1}{z^2} + \ldots$$

ist. Man hat nun

$$M(u_1^{(n)}) + M(u_2^{(n)}) + \ldots + M(u_n^{(n)}) = \log \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi(z) - \varphi(u_\nu^{(n)})}{z - u_\nu^{(n)}} = \log \frac{\omega_n(x)}{z^n - \tau^n},$$

wenn x und z durch die Relation $x = \varphi(z)$ miteinander verbunden sind. Es ist ferner

$$\alpha_0 = \lim_{u=\infty} \log \frac{\dfrac{\varphi(u)}{u} - \dfrac{\varphi(z)}{u}}{1 - \dfrac{z}{u}} = \log \tau,$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n - \tau^n} = 1 \qquad (x = \varphi(z))$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r$. [Man hat sogar für alle k

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n - \tau^n} \right)^{n^k} = 1 \qquad (x = \varphi(z);\ |z| \geqq r).]$$

Daraus folgt

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \frac{\omega_n(x)}{z^n} = 1 \qquad (x = \varphi(z)),$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r$. Es ist also insbesondere

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^n} \operatorname*{Max}_{(C)} |\omega_n(x)| = 1.$$

Damit ist Satz X vollständig bewiesen.

---

[37]) Vgl. die Fußnote [10]).

31. Es sei z. B. C eine Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$ und mit
n Halbachsen a und b $(a > b)$. Ist dann R durch die Bedingungen

$$a = \frac{R + \frac{1}{R}}{2}, \quad b = \frac{R - \frac{1}{R}}{2} \qquad (R > 1)$$

stimmt, so ist

$$\varphi(z) = \frac{Rz}{2} + \frac{1}{2Rz}.$$

n hat also

$$\tau = \frac{R}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{2}{a+b}\right)^n m_n = 1.$$

der Tat, es ist nach Fußnote [22])

$$m_n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{a-b}{2}\right)^n.$$

Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $(-1, 1)$ verliert Satz X seine Gültigkeit. Dann ist nämlich [38]) $a = 1$, $b = 0$, also

$$|\tau| = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}}, \quad m_n = \frac{1}{2^{n-1}},$$

h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{|\tau|^n} = 2$$

l nicht 1, wie es nach Satz X sein müßte.

§ 10.

Ein Grenzwertsatz über die Determinanten D_n.

32. Ich komme jetzt meinem Ziel mit einem Schritte näher, indem mit Hilfe des Vorhergehenden einen Grenzwertsatz über die Deter-
nanten D_n [39]) beweise. D_n ist die Determinante der positiv definiten
rmiteschen Form

$$H_n(1; t) = \frac{1}{l} \int_C |t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_n \xi^n|^2 d\sigma;$$

ist also stets

$$D_n > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

gilt nun der

Satz XI. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen Ebene und D_n die Determinante der Hermiteschen Form*

$$H_n(1; t) = \frac{1}{l} \int_C |t_0 + t_1 \xi + \ldots + t_n \xi^n|^2 d\sigma \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[38]) Vgl. 14.
[39]) Vgl. 3.

Ist

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots \qquad (\tau \neq 0)$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ *schlicht auf das Äußere der Kurve* C *der* x*-Ebene abbildet, während die Punkte* $z = \infty$ *und* $x = \infty$ *einander entsprechen, dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{2\pi}{l}, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{|\tau|^n} = \sqrt{\frac{2\pi|\tau|}{l}}.$$

Die Zahlen μ_n und m_n sind somit asymptotisch gleich [40]).

33. Es ist zunächst nach Satz II

$$\mu_n^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = \operatorname{Min} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma,$$

wo $A_n(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades von der Form

$$A_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

bezeichnet. Man hat aber nach **28.**

$$A_n(x) = \tau^n z^n r(z) \qquad (x = \varphi(z)),$$

wo $r(z)$ für $|z| \geqq 1$ regulär und $r(\infty) = 1$ ist. Es ist ferner auf C

$$\frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{|\tau|^{2n}}{l} \int_0^{2\pi} |r(z)|^2 |\varphi'(z)| d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Nun ist die Funktion

$$r(z)\sqrt{\varphi'(z)}$$ [41])

regulär für $|z| \geqq 1$ und für $z = \infty$ gleich $\sqrt{\tau}$; daraus folgt für alle $A_n(x)$

$$\frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma \geqq \frac{2\pi}{l} |\tau|^{2n+1}$$ [42]),

---

[40]) Vgl. die Fußnote [21]). Es ist namentlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{m_n} = \sqrt{\frac{2\pi|\tau|}{l}}.$$

[41]) Vgl. **27.**

[42]) Ist $f(z)$ regulär für $|z| \leqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \geqq |f(0)|^2.$$

Ist $f(z)$ regulär für $|z| \geqq 1$, so ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \geqq |f(\infty)|^2.$$

h.

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} \geqq \frac{2\pi}{l}|\tau|^{2n+1}.$$

Ich beweise anderseits, daß für geeignet gewählte Polynome $A_n(x)$ n der obigen Form

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{2\pi}{l}(1+\varepsilon)$$

, wo ε eine gegebene, dem absoluten Betrage nach beliebig kleine öße bezeichnet. Aus diesen Ergebnissen folgt dann der Satz XI.

34. Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_n}{z^n} + \ldots \qquad \left(\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right);$$

ese Funktion ist regulär für $|z| > \varrho$. Ich setze

$$g_\nu(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu},$$

nn ist

$$\int_C |g_\nu(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_\nu(z)|^2 |\varphi'(z)|\, d\theta = 1 + \varepsilon_\nu \qquad (z = \psi(\xi);\ z = e^{i\theta}),$$

$\varepsilon_\nu = o(1)$ ist. Es sei nun ν eine feste Zahl und $n > \nu$; ich setze

$$A_n(x) = \frac{\beta_0 \omega_n(x) + \beta_1 \tau \omega_{n-1}(x) + \ldots + \beta_\nu \tau^\nu \omega_{n-\nu}(x)}{\beta_0},$$

$\omega_n(x)$ die obige Bedeutung (**30.**) hat. Dies ist ein Polynom n-ten ades von der Form $A_n(x) = x^n + \ldots$. Man hat ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\tau^n} \frac{A_n(x)}{z^n} = \frac{\beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu}}{\beta_0} = \frac{g_\nu(z)}{\beta_0} \qquad (x = \varphi(z)),$$

d zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r > \varrho$. D. h.

$$\lim_{=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n}} \frac{1}{l} \int_C |A_n(\xi)|^2 d\sigma = \frac{1}{l}\int_C \frac{|g_\nu(z)|^2}{|\beta_0|^2} d\sigma = \frac{2\pi}{l}\frac{1+\varepsilon_\nu}{|\beta_0|^2} = \frac{2\pi|\tau|}{l}(1+\varepsilon_\nu)$$
$$(z = \psi(\xi)),$$

raus offenbar die Behauptung folgt. Damit ist Satz XI vollständig viesen.

35. Im Grenzfalle, wo C das doppelt zu durchlaufende Intervall $-1, 1)$ ist, ist Satz XI nicht mehr mehr gültig. Dann hat man nämlich $= \frac{1}{2}$, $l = 4$ und

$$\mu_n^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = \text{Min}\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (A_n(x))^2 dx = \frac{1}{2k_n^2}\int_{-1}^{1} (X_n(x))^2 dx = \frac{1}{k_n^2}\frac{1}{2n+1},$$

wo k_n den höchsten Koeffizient des n-ten Legendreschen Polynoms $X_n(x)$ bezeichnet. Nun ist

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)),$$

also

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}(1+o(1)),$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|\tau|^{2n+1}} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \pi$$

und nicht $\frac{\pi}{2}$, wie es nach Satz XI sein müßte.

§ 11.

Über einen asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome.

36. Ich bestimme jetzt einen asymptotischen Ausdruck der orthogonalen Polynome $P_n(x)$, der außerhalb von C gültig ist; es gilt der

Satz XII. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots \qquad (\tau \neq 0;\ \tau = |\tau| e^{i\alpha})$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C der x-Ebene abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen; es sei endlich $z = \psi(x)$ die inverse Funktion von $x = \varphi(z)$. Dann gilt für die zur Kurve C gehörigen orthogonalen Polynome der asymptotische Ausdruck

$$P_n(x) = e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\psi'(x)}\,(\psi(x))^n (1+o(1)),$$

u. zw. gleichmäßig außerhalb von C.

Daraus folgt für die abbildende Funktion $\psi(x)$ außerhalb von C die folgende Darstellung:

$$\psi(x) = e^{-i\alpha} \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \quad [43]).$$

---

[43]) Für die Tschebyscheffschen Polynome $T_n(x)$ gilt eine ähnliche asymptotische Formel. (Vgl. Faber, a. a. O. [21]), S. 88–92). Es ist für alle x außerhalb von C

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_n(x)}{(\tau\psi(x))^n} = 1;$$

setze ich also

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, P_n^*(x) = \frac{P_n^*(x)}{\mu_n},$$

d. h. ist $P_n^*(x)$ das n-te orthogonale Polynom, so normiert, daß sein höchster Koeffizient gleich 1 sei, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n^*(x)}{T_n(x)} = \sqrt{\tau\psi'(x)}.$$

Ich beweise diesen Satz durch Berechnung des Integrals

$$J_n' = \frac{1}{l}\int_C \left| \sqrt{\psi'(\xi)} - \lambda_n \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma,$$

die Konstante λ_n später bestimmt wird. Man hat

$$\frac{1}{l}\int_C |\psi'(\xi)|\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{l},$$

ner

$$\frac{1}{l}\int_C \left| \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma = \frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2 d\sigma = 1;$$

ist endlich

$$\int \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \overline{\sqrt{\psi'(\xi)}}\, d\sigma = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n} \frac{|\varphi'(z)|}{\overline{\sqrt{\varphi'(z)}}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n} \sqrt{\varphi'(z)}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

un ist die Funktion

$$K(z) = \frac{P_n(\varphi(z))}{z^n}\sqrt{\varphi'(z)}$$

gulär für $|z| \geqq 1$ und man hat

$$K(\infty) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \tau^{n+\frac{1}{2}}.$$

ist also

$$J_n' = \frac{2\pi}{l} + |\lambda_n|^2 - 2\Re\, \lambda_n \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \tau^{n+\frac{1}{2}}\ ^{44}).$$

h setze hier

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \bar{\tau}^{n+\frac{1}{2}},$$

nn folgt

$$J_n' = \frac{2\pi}{l} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \frac{D_{n-1}}{D_n} |\tau|^{2n+1},$$

h. nach Satz XI

$$\lim_{n=\infty} J_n' = 0.$$

Es ist also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{l}\int_C \left| \sqrt{\psi'(\xi)} - \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \bar{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \frac{P_n(\xi)}{(\psi(\xi))^n} \right|^2 d\sigma = 0.$$

Die Funktion unter dem Zeichen des absoluten Betrages ist aber gulär-analytisch, wenn ξ im abgeschlossenen Außenbereich von C liegt.

---

44) Vgl. die Fußnote 29).

Daraus folgt nach dem Hilfssatz in 8., daß für alle x, welche außerhalb von C liegen,

$$\lim_{n=\infty} \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, \bar{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n} = \sqrt{\psi'(x)}$$

ist, d. h. nach Satz XI

$$\lim_{n=\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha} \frac{P_n(x)}{(\psi(x))^n} = \sqrt{\frac{l}{2\pi}}\, \sqrt{\psi'(x)}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

37. Liegt x außerhalb von C, so ist $\psi'(x) \neq 0$; man hat also

$$\psi(x) = e^{-i\alpha} \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

d. h. nach **4.**

$$\psi(x) = \varepsilon \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_{n+1}}} \frac{|h_{pq}x - h_{p+1,q}|_0^n}{|h_{pq}x - h_{p+1,q}|_0^{n-1}},$$

wo

$$|\varepsilon| = 1, \quad h_{pq} = \frac{1}{l}\int_C \xi^p \bar{\xi}^q d\sigma, \quad D_n = |h_{pq}|_0^n$$

ist. Mit Hilfe dieser Formel kann man die abbildende Funktion mit rationalen Funktionen approximieren.

38. Dieses Resultat liefert auch zur Darstellung der Funktion $\gamma(x)$ ein neues Mittel, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene auf das Gebiet $|z| < 1$ der z-Ebene schlicht abbildet, während ein gegebener Punkt $x = a$ des Innern von C in $z = 0$ übergeht (§ 6). Man kann nämlich mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

$$x' = \frac{1}{x-a}$$

das Innere der Kurve C der x-Ebene auf das Äußere einer Kurve C' der x'-Ebene abbilden; die Funktion der $z' = \Psi(x')$, welche das letztere Gebiet auf das Gebiet $|z'| > 1$ der z'-Ebene abbildet, steht dann mit $\gamma(x)$ im folgenden Zusammenhang:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\Psi\left(\frac{1}{x-a}\right)}.$$

In der Tat sei $z' = \frac{1}{z}$, dann ist

$$z' = \Psi(x') \quad \text{und} \quad z = \gamma(x),$$

also

$$\gamma(x) = \frac{1}{z'} = \frac{1}{\Psi(x')} = \frac{1}{\Psi\left(\frac{1}{x-a}\right)}.$$

Es sei nun der Einfachheit halber $a = 0$; ich setze

$$h'_{pq} = \frac{\int_{C'} \xi^p \bar{\xi}^q d\sigma}{\int_{C'} d\sigma} = \frac{\int_C \frac{d\sigma}{\xi^{p+1}\bar{\xi}^{q+1}}}{\int_C \frac{d\sigma}{|\xi|^2}}$$

$$D'_n = |h'_{pq}|_0^n.$$

nn ist also

$$\gamma(x) = \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = \varepsilon' x \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{D'_{n+1}}{D'_{n-1}} \frac{|h'_{pq} - h'_{p+1,q} x|_0^{n-1}}{|h'_{pq} - h'_{p+1,q} x|_0^n}} \qquad (|\varepsilon'| = 1)$$

alle x im Innern von C.

§ 12.

twickelung einer analytischen Funktion nach orthogonalen Polynomen.

39. Als wichtigste Anwendung des Satzes über den asymptotischen sdruck der orthogonalen Polynome behandle ich die Frage über die nvergenz der Entwickelung einer analytischen Funktion nach orthogo-en Polynomen. Wir haben bereits in § 2 gesehen, daß jede analytische nktion $F(x)$, welche im abgeschlossenen Innenbereich von C regulär eine Entwickelung nach orthogonalen Polynomen gestattet

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

en Koeffizienten sich auf die Fouriersche Weise ergeben:

$$c_n = \frac{1}{l} \int_C F(\xi) \overline{P_n(\xi)} d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

se Entwickelung konvergiert im Innern von C und stellt dort $F(x)$ dar.

Was nun die Konvergenzverhältnisse am Rande und außerhalb von C rifft, besteht eine vollständige Analogie zu den Potenzreihen. Es gilt nlich der

Satz XIII. *Es sei $F(x)$ im abgeschlossenen Innenbereich der ana-ischen Kurve C regulär-analytisch und*

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

e Entwickelung nach orthogonalen Polynomen. Es sei C_{R_0} $(R_0 > 1)$ größte Kreisbild (bei der konformen Abbildung des Außengebietes C)[45], welches keinen singulären Punkt von $F(x)$ in seinem Innern hält. Dann konvergiert die obige Entwickelung absolut und gleich-

[45]) Vgl. § 8.

mäßig im Innern von C_{R_0}[46]) *und stellt dort $F(x)$ dar. Die Entwickelung divergiert ferner außerhalb von C_{R_0}. Sie hat somit C_{R_0} als echten Konvergenzbereich.*

Man hat übrigens

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R_0}$$[47]).

40. Es sei zunächst im allgemeinen

$$(A) \qquad a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots$$

irgendeine *formell* aufgeschriebene, nach den Polynomen $P_n(x)$ fortschreitende Reihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

konvergent ist. Es sei

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \qquad (\alpha \leqq 1).$$

Ich behaupte dann, daß *die Reihe* (A) *das Kreisbild $C_{\frac{1}{\alpha}}$ als echten Konvergenzbereich besitzt, d. h. sie konvergiert im Innern von $C_{\frac{1}{\alpha}}$ absolut und gleichmäßig und stellt dort eine reguläre Funktion dar; sie divergiert hingegen überall außerhalb von $C_{\frac{1}{\alpha}}$.*

Ist $\alpha = 1$, so folgt aus Satz VI, daß die Reihe (A) stets absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn x im Innern von $C_1 = C$ liegt. Sie stellt dort ferner eine reguläre Funktion dar.

Es sei jetzt $\alpha < 1$. Liegt x außerhalb von C, so ist nach Satz XII

$$g' < \left|\frac{P_n(x)}{z^n}\right| < g'',$$

wo die Veränderlichen x und z miteinander durch die Relation

$$x = \varphi(z), \quad z = \psi(x)$$

verknüpft sind; g' und g'' bezeichnen hier positive, von n unabhängige Konstanten, die sogar auch von x bzw. z unabhängig sind, wenn $|z| \geqq R^*$ ist, wo $R^* > 1$ eine feste Zahl bedeutet. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ist nun für $|z| < \frac{1}{\alpha}$ absolut und gleichmäßig konvergent; die Reihe (A) konvergiert somit absolut und gleichmäßig, wenn x auf irgendeinem Kreis-

[46]) Vgl. die Fußnote [4]).

[47]) Auf dem Kreisbilde C_{R_0}, welches den Konvergenzbereich der Entwickelung begrenzt, liegt somit wenigstens ein singulärer Punkt von $F(x)$.

de $C_R\left(1 < R < \frac{1}{\alpha}\right)$ liegt. Daraus folgt aber nach einem Weierstraßschen eorem[48]), daß sie im Innern von $C_{\frac{1}{\alpha}}$ (also auch in C) absolut und ichmäßig konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt.

Liegt anderseits x außerhalb von $C_{\frac{1}{\alpha}}$, wo wieder $\alpha \leqq 1$ ist, so ist $| > \frac{1}{\alpha}$, d. h.

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |a_n z^n| = \infty$$

d also

$$\lim_{n=\infty} |a_n P_n(x)| = \infty,$$

raus die Divergenz von (A) folgt.

41. Es sei nun $F(x)$ eine im abgeschlossenen Innenbereich von C gulär-analytische Funktion und

$$F(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

h.

$$c_n = \frac{1}{l} \int_C F(\xi) \overline{P_n(\xi)}\, d\sigma \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

nn konvergiert nach Satz III die Reihe

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 + \ldots.$$

n setze

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = c \qquad (c \leqq 1),$$

nn behaupte ich, daß $c = \frac{1}{R_0}$ ist, wenn C_{R_0} $(R_0 > 1)$ das größte Kreisbild zeichnet, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(x)$ hält (es ist also $c < 1$); d. h. die Entwickelung von $F(x)$ besitzt C_{R_0} echten Konvergenzbereich.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich zunächst, daß diese Entwickelung Innern von $C_{\frac{1}{c}}$ absolut und gleichmäßig konvergiert und dort eine guläre Funktion darstellt. Diese Funktion muß übrigens mit $F(x)$ übereinstimmen, da wir bereits nach Satz IV wissen, daß die Entwickelung Innern von C die Funktion $F(x)$ darstellt. Daraus folgt nach der finition von R_0, daß

$$\frac{1}{c} \leqq R_0, \text{ d. h. } c \geqq \frac{1}{R_0}$$

42. Ich beweise anderseits, daß

$$c \leqq \frac{1}{R_0}$$

[48]) Vgl. etwa Montel, a. a. O.[21]), S. 16.

ist; dies wird jedenfalls dargetan, wenn ich für alle $R(1 < R < R_0)$ die Abschätzung

$$c_n = O\left(\frac{1}{R^n}\right)$$

beweise. Daraus folgt nämlich

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \frac{1}{R}$$

und also, da R beliebig nahe zu R_0 liegt,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = c \leqq \frac{1}{R_0}.$$

Diese Abschätzung folgt aber aus dem folgenden Hilfssatz:

Es sei $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich des Kreisbildes C_R $(R > 1)$; es existieren dann Polynome n-ten Grades $V_n(x)$, für welche

$$|F(x) - V_n(x)| < \frac{B}{R^n}$$

ist, wenn x auf der Kurve C liegt; B bezeichnet hier eine von n und x unabhängige Konstante.

In der Tat folgt dann mit Bezug auf die Orthogonalitätseigenschaft der Polynome $P_n(x)$, daß

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C F(\xi)\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - Q(\xi))\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma$$

ist, wo $Q(x)$ ein *beliebiges* Polynom $n-1$-ten Grades bezeichnet. Es ist also insbesondere

$$c_n = \frac{1}{l}\int_C (F(\xi) - V_{n-1}(\xi))\overline{P_n(\xi)}\,d\sigma$$

und also

$$|c_n| < \frac{B}{R^{n-1}}\,\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|\,d\sigma,$$

d. h. nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$|c_n| < \frac{B}{R^{n-1}}\sqrt{\frac{1}{l}\int_C |P_n(\xi)|^2\,d\sigma} = \frac{B}{R^{n-1}},$$

womit die verlangte Abschätzung geliefert wird.

43. Es bleibt uns noch übrig, den obigen Hilfssatz zu beweisen. Dies geschieht z. B. durch Heranziehung gewisser Interpolationspolynome,

dem man als Interpolationsstellen, nach dem Vorgange von Herrn jér [49]), etwa folgende wählt:

$$v_\nu^{(n)} = \varphi\left(r e^{i\nu\frac{2\pi}{n}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

die $v_\nu^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben wie in **30** [50]). Dann werden, wie rt ausgeführt wurde, die Polynome

$$\omega_n(x) = (x - v_1^{(n)})(x - v_2^{(n)}) \ldots (x - v_n^{(n)})$$

gende Gleichung erfüllen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_n(x)}{\tau^n z^n} = 1,$$

d zwar gleichmäßig für $|z| \geqq r' > r$. Es sei nun x auf C. Ich setze ch einer bekannten Formel

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\left(1 - \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\right) d\xi \,[51]),$$

nn ist

$$V_n(v_\nu^{(n)}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - v_\nu^{(n)}}\, d\xi = F(v_\nu^{(n)}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

d

$$F(x) - V_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\, d\xi.$$

Nun ist aber gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(\xi)}\right| R^{n+1} = 1,$$

enn x auf der Kurve C und ξ auf dem Kreisbilde C_R liegt. Daraus lgt der Hilfssatz. Damit ist Satz XIII vollständig bewiesen.

44. Als Anwendung betrachte ich den Spezialfall

$$F(x) = \frac{l}{2\pi}\,\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\,\sqrt{\gamma'(x)},$$

a ein innerer Punkt von C ist und $z = \gamma(x)$ (wie in § 6) die Funktion zeichnet, welche das Innere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf $|z| < 1$ abbildet, während $x = a$ in $z = 0$ übergeht. Dann ist $F(x)$ fenbar regulär in einem Gebiete, welches die Kurve C ganz in seinem

---

[49]) Vgl. die Fußnote [2]).

[50]) Man kann zu diesem Zwecke auch die Interpolationspolynome des § 14 be-tzen.

[51]) Vgl. etwa **Montel**, a. a. O. [21]), S. 49.

Innern enthält; sie ist also jedenfalls regulär auf der Kurve C. Man hat aber nach § 6

$$\frac{l}{2\pi}\overline{\sqrt{\gamma'(a)}}\sqrt{\gamma'(x)} = \overline{P_0(a)}P_0(x) + \overline{P_1(a)}P_1(x) + \ldots + \overline{P_n(a)}P_n(x) + \ldots,$$

also konvergiert diese Entwickelung nicht nur im Innern von C (wie es in § 3, Satz VI bewiesen wurde), sondern auch auf C und sogar auch in einem Kreisbilde C_R, wo $R-1$ eine genügend kleine positive Zahl ist, und stellt dort $F(x)$ dar. Es ist ferner

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|P_n(a)|} < 1,$$

d. h.

$$P_n(a) = O(\varrho^n),$$

wo $\varrho < 1$ ist. (Aus Satz VI folgt nur $\lim_{n=\infty} P_n(a) = 0$.)[52])

§ 13.

Über die Wurzeln der orthogonalen Polynome.

45. Ich will jetzt eine Verschärfung von Satz VII aussprechen, welche aus Satz XII unmittelbar folgt.

Satz XIV. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen x-Ebene, $P_n(x)$ das zugehörige n-te orthogonale Polynom und*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Wurzeln desselben. Die Menge dieser Wurzeln für alle n hat keinen Häufungspunkt außerhalb von C.

Dieser Satz hat nach Satz VII nur dann Interesse, wenn C nicht durchweg konvex ist.

46. Satz XII gestattet auch weitere Folgerungen über die Wurzeln der orthogonalen Polynome zu ziehen. Aus dem asymptotischen Ausdruck von $P_n(x)$ folgt nämlich durch logarithmische Differentiation

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{P_n'(x)}{P_n(x)} - n\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}.$$

D. h.

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x - x_\nu^{(n)}} - n\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}.$$

Es sei nun $F(x)$ eine beliebige analytische Funktion, welche sich im ab-

[52]) Die in § 6 gegebene Darstellung von $\gamma'(x)$ gilt somit auch auf der Kurve C.

schlossenen Innenbereich von C regulär verhält, dann folgt aus dieser rmel durch Multiplikation mit $F(x)$ und durch Integration

$$\lim_{n=\infty}(F(x_1^{(n)})+F(x_2^{(n)})+\ldots+F(x_n^{(n)})-na)=\frac{b}{2},$$

der Kürze halber

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}F(\xi)\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}d\xi,\qquad b=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}F(\xi)\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}d\xi$$

etzt wird. Die Integration bezieht sich auf ein Kreisbild C_R, wo -1 eine genügend kleine positive Größe ist. Dann folgt aber nach m Cauchyschen Integralsatze, daß

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}F(\xi)\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}d\xi,\qquad b=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}F(\xi)\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}d\xi$$

Man hat insbesondere

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}F(\varphi(z))\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\varphi(e^{i\Theta}))\,d\theta,$$

o

$$\lim_{n=\infty}\frac{F(x_1^{(n)})+F(x_2^{(n)})+\ldots+F(x_n^{(n)})}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\varphi(e^{i\Theta}))\,d\theta.$$

§ 14.

Anwendung auf Interpolation.

47. Satz XV. *Es sei C eine analytische Kurve in der komplexen Ebene und $F(x)$ regulär-analytisch im abgeschlossenen Innenbereich n C. Es seien, wie oben, die Wurzeln der zu C gehörigen orthogonalen olynome*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

h bilde die Interpolationspolynome

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \ldots,\ Q_{n-1}(x),\ \ldots,$$

finiert durch die Forderung

$$Q_{n-1}(x_\nu^{(n)})=F(x_\nu^{(n)})\qquad (\nu=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,3,\ldots)^{53}).$$

---

[53]) $F(x)$ ist offenbar regulär in einem Kreisbilde C_R, wo $R-1$ eine genügend ine positive Zahl ist. Die Wurzeln von $P_n(x)$ liegen dann, von einem bestimmten an, im Innern von C_R. Die Polynome $Q_{n-1}(x)$ sind natürlich bloß für diese Werte n n definiert.

Dann ist

$$\lim_{n=\infty} Q_n(x) = F(x)$$

(und zwar gleichmäßig) im Innern des größten Kreisbildes C_{R_0} $(R_0 > 1)$, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(x)$ enthält.

Es sei nämlich $1 < R < R_0$, dann ist, wenn x im Innern von C_R liegt, für genügend große n

$$Q_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\left(1 - \frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right) d\xi \,^{54}),$$

also

$$F(x) - Q_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\, d\xi,$$

d. h.

$$|F(x) - Q_{n-1}(x)| < \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \left|\frac{F(\xi)}{\xi - x}\right| \left|\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right| d\sigma.$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)}\right| \frac{R^n}{|\psi(x)|^n} = \left|\frac{\psi'(x)}{\psi'(\xi)}\right|^{\frac{1}{2}},$$

so daß

$$\frac{P_n(x)}{P_n(\xi)} = O(\vartheta^n),$$

wenn x im Innern und ξ auf C_R liegt; hier hat man $0 < \vartheta < 1$, und ϑ ist von n und ξ unabhängig. Hieraus folgt

$$F(x) - Q_{n-1}(x) = O(\vartheta^n),$$

womit Satz XV bewiesen ist. Auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz läßt sich leicht bestätigen.

Dieser Satz liefert eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Gaußschen Interpolation, bei welcher die Interpolationsstellen die Wurzeln der Legendreschen Polynome sind. Die liegen alle im Intervalle $(-1, 1)$. Die Kreisbilder sind dann homofokale Ellipsen mit den Brennpunkten $-1, 1$.

---

[54]) Vgl. die Fußnote [51]).

(Eingegangen am 9. Februar 1920.)

Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Reye hat den Satz ausgesprochen: Die Kollineation zweier kollinearen äume mit einem einzigen Decktetraeder wird durch ∞^3 polare Korrelaonen umgekehrt, und durch ∞^3 Kollineationen in sich selbst übergeführt. er zunächst nur skizzierte[1]) und später erst durchgeführte[2]) zugehörige eweis ist kompliziert und nicht einwurfsfrei. Mehrfach hat Reye selbst ne einfachere und strenge Darlegung gewünscht. Der von mir dann gebene Beweis[3]) dürfte diesen Anforderungen genügen, ist aber trotzdem ch umständlich; außerdem wurde letzthin mir gegenüber der berechtigte unsch geäußert, hier die analogen Sätze für Raum und Ebene auch alog zu erweisen. Die folgende Untersuchung geht darauf ein; es gegt dabei die Hauptergebnisse meiner iheren Arbeit einfacher, kürzer und ersichtlicher zu gestalten. Wiederum rden erst die ∞^3 Kollineationen ableitet und dann die ∞^3 polaren Korretionen. Reye macht es umgekehrt!

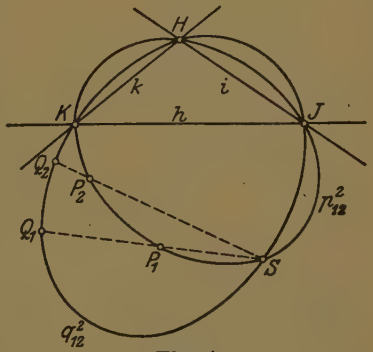

Fig. 1.

1. In einer Ebene gibt es nur ne Kollineation φ_{12}, für die eine gebene Punktinvolution $h(A_1^h A_i^h, {}^h B_i^h, \ldots)$ und eine zu ihr perspektive rahleninvolution $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ variant sind und die außerdem (Fig. 1)

[1]) Reye, Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften, th. Annalen, **43** (1893), Nr. 21—23.

[2]) Reye, Die Geometrie der Lage, dritte Abteilung, vierte Auflage, Leipzig 1910, 194—195.

[3]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, urn. f. d. reine u. angew. Math., **149** (1919), Nr. 26—28.

zwei Punkte P_1, P_2 einander zuweist[4]). Das Deckdreieck HJK der durch φ_{12} kollinear aufeinander bezogenen Felder η_1, η_2 hat den Deckpunkt H und den Gegendeckstrahl h. Beide Elemente sind stets reell; die beiden übrigen Deckpunkte J, K und die Deckstrahlen i, k können als Doppelelemente bzw. der Involutionen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ reell oder konjugiert imaginär sein. Sind Q_1, Q_2 zwei weitere homologe Punkte von η_1, η_2, so erzeugen die homologen Strahlenbüschel P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 die Kegelschnitte p_{12}^2, q_{12}^2. Sie sind dem Deckdreiecke HJK umbeschrieben und haben daher noch einen reellen Punkt S gemein, den Schnittpunkt der homologen Strahlen P_1Q_1, P_2Q_2. Die durch den Strahlenbüschel S projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitte p_{12}^2, q_{12}^2 bestimmen als homologe Kurven zwei kollineare Felder η^p, η^q[5]). Die Kollineation φ' dieser Felder läßt ebenfalls die Involutionen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant, weist aber den Punkten P_1, P_2 bzw. die Punkte Q_1, Q_2 zu. Kurz:

Führt in einer Ebene eine Kollineation φ_{12} eine gegebene Punktinvolution $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und eine gegebene zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ in sich selbst über und weist sie den Punkten P_1, Q_1 bzw. die Punkte P_2, Q_2 zu, so gibt es eine Kollineation φ', die ebenfalls die beiden Involutionen invariant läßt, den Punkten P_1, P_2 aber bzw. die Punkte Q_1, Q_2 zuweist.

Insbesondere gilt, wenn die gegebenen Involutionen hyperbolisch sind:

Entsprechen in zwei kollinearen Feldern η_1, η_2 mit dem Deckdreiecke HJK den gegebenen Punkten P_1, Q_1 bzw. die Punkte P_2, Q_2, so ist HJK auch das Deckdreieck zweier kollinearen Felder η^p, η^q, in denen den Punkten P_1, P_2 bzw. die Punkte Q_1, Q_2 entsprechen.

Nach unserem Satze führt die Kollineation φ' die kollinearen Felder η_1, η_2 in sich selbst über. Fallen demnach die homologen Punkte Q_1, Q_2 von η_1, η_2 nacheinander mit allen homologen Punkten dieser Felder zusammen, so fallen auch die Felder η^p, η^q nacheinander mit allen kollinearen Feldern zusammen, für deren Kollineationen die Kollineation φ_{12} invariant ist. Somit ergibt sich:

Die Kollineationen in einer Ebene, die eine gegebene Punktinvolution $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und eine gegebene zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant lassen, sind füreinander invariant.

---

[4]) Jolles, a. a. O., Nr. 9.

[5]) Seydewitz, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde. Arch. d. Math. u. Phys., 8 (1846), § 23, Nr. 2.

Alle ∞^2 kollinearen Felder einer Ebene, deren Kollineationen für-
ander invariant sind, bilden ein Bündelheer[6]), gleichgültig ob ihr ge-
insames Deckdreieck reell ist oder ein Paar konjugiert imaginärer
ken hat.

2. Außer den beiden Feldern η_1, η_2, deren Kollineation φ_{12} zueinander perspektiven Involutionen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant läßt und die Punkte P_1, P_2 einander weist (**1.**), sei das polare Feld π gegeben, dessen Korrelation χ_π die den Involutionen miteinander vertauscht und P_1 einen willkürlich ge-
hlten Strahl p' der Ebene als Polare zuordnet[7]). In π sind der Deck-
nkt H von η_1, η_2 und sein Gegendeckstrahl h Pol und Polare; sie
gen je eine Involution konjugierter Elemente des polaren Feldes.
r die Projektivitäten dieser Involutionen bzw. die Involutionen
$A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant. Die Projek-
ität der Involution konjugierter Punkte von π auf h kehrt folglich die
ojektivität je zweier Punktreihen des durch $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$
henden Büschels projektiver Punktreihen um, die Projektivität der In-
lution konjugierter Strahlen von π in H die Projektivität je zweier
ahlenbüschel des durch $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ gehenden Büschels pro-
tiver Strahlenbüschel[8]). Je zwei projektive Punktreihen des durch
$A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ gehenden Büschels führt also χ_π in zwei projektive
ahlenbüschel des durch $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ gehenden Büschels über,
d diese Strahlenbüschel schneiden h in zwei Punktreihen, deren Pro-
tivität zu der jener Punktreihen invers ist. Umgekehrt führt χ_π je zwei
ojektive Strahlenbüschel des durch $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ gehenden Büschels
zwei projektive Punktreihen des durch $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ gehen-
n Büschels über, und diese Punktreihen werden aus H durch zwei
ahlenbüschel projiziert, deren Projektivität zu der jener Strahlenbüschel
ers ist. Insbesondere gilt dies von den homologen Strahlenbüscheln
$(a_1^H, \ldots)$, $H(a_2^H, \ldots)$ von η_1, η_2 und den zu ihnen perspektiven homo-
en Punktreihen $h(A_1^h, \ldots)$, $h(A_2^h, \ldots)$.

3. In den Feldern η_1, η_2, deren Kollineation φ_{12} die beiden Involu-
nen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant läßt
d die Punkte P_1, P_2 einander zuweist, projizieren (Fig. 2) die homo-
en Strahlen p_1^H, p_2^H des Deckpunktes H die homologen Punkte P_1, P_2
d treffen den Deckstrahl h in den homologen Punkten P_1^h, P_2^h. Nun
d im polaren Felde π, dessen Korrelation χ_π die Involutionen miteinander

[6]) Jolles, a. a. O., Nr. 11.
[7]) Jolles, a. a. O., Nr. 16.
[8]) Jolles, a. a. O., Nr. 6.

vertauscht, den Punkten P_2, P_1 bzw. die Geraden p'', p' zugeordnet, die h in zwei homologen Punkten Q_1^h, Q_2^h von η_1, η_2 schneiden (2.). Da H in π die Polare h hat, so entsprechen einander Q_2^h, Q_1^h in den kollinearen Feldern σ_1, σ_2, in die η_1, η_2 durch die Korrelation χ_π übergeführt werden. Ebenso entsprechen einander in σ_1, σ_2 die Punkte P_2^h, P_1^h, die Strahlen q_2^H, q_1^H und p_2^H, p_1^H, endlich die Punkte R', R'' als Pole der homologen Strahlen $Q_1^h P_1 = r_1$ und $Q_2^h P_2 = r_2$ von η_1, η_2. Der Punktwurf $HP_2^h R' P_2$ ist aber projektiv zu dem aus den Polaren seiner Punkte gebildeten Strahlenwurfe $hq_1^H r_1 p''$ und dieser perspektiv zu dem Punktwurfe $P_1^h H P_1 R''$ und folglich projektiv zum Wurfe $HP_1^h R'' P_1$. Somit besteht die Beziehung:

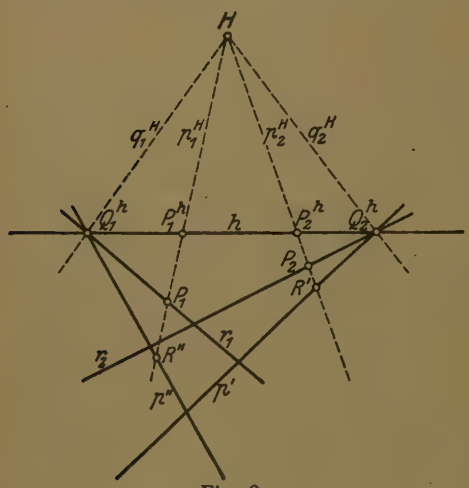

Fig. 2.

$$HP_2^h R' P_2 \overline{\wedge} HP_1^h R'' P_1.$$

In σ_1, σ_2 ist aber H ein Deckpunkt und P_2^h, P_1^h und R', R'' je ein Paar homologer Punkte, folglich muß auch P_2, P_1 ein Paar homologer Punkte dieser Felder sein. Also ist bewiesen:

Bleiben in einer Ebene eine gegebene Punktinvolution $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und eine gegebene zu ihr perspektive Strahleninvolution $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ für eine Kollineation φ_{12} invariant, während eine polare Korrelation χ_π sie miteinander vertauscht, so kehrt die Korrelation χ_π die Kollineation φ_{12} um.

Aus diesem Satze folgt, wenn die Involutionen hyperbolisch sind:

Enthält ein polares Feld π ein Polardreieck HJK und die einander zugeordneten Elemente P_1, p_1 und P_2, p_2, so ist das Dreieck HJK zugleich das Deckdreieck zweier kollinearen Felder η_1, η_2, in denen die Punkte P_1, P_2 und die Strahlen p_2, p_1 einander entsprechen.

Alle polaren Felder π, deren Korrelationen χ_π die Kollineation φ_{12} umkehren, bilden ein Bündelheer[9]). Ihr gemeinsames Polardreieck ist das durch die Kollineation φ_{12} bestimmte Deckdreieck. Seine Ecken sind entweder reell, oder zwei von ihnen sind konjugiert imaginär.

---

[9]) Jolles, a. a. O., Nr. 16.

4. Es mögen in einer Ebene die zueinander perspektiven Involutionen $A_1^h A_i^h$, $B_1^h B_i^h$, ...) und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ für die Kollineation φ_{12} r Felder η_1, η_2 invariant sein, hingegen durch die Korrelationen χ_π, χ'_π r polaren Felder π, π' miteinander vertauscht werden. φ_{12} ist bestimmt, bald außerdem zwei homologe Punkte P_1, P_2 von η_1, η_2 gegeben sind (1.), und χ'_π, sobald in π noch die Polare von P_1 und in π' die Polare von bekannt ist (2.). Ist insbesondere die Polare von P_1 in π zugleich Polare von P_2 in π', so lassen die Kollineationen φ_{12} und $\varphi = \chi_\pi \cdot \chi'_\pi$ ht nur die Involutionen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ variant, sondern weisen auch die Punkte P_1, P_2 einander zu. Die llineationen φ_{12} und φ sind also identisch, und es folgt:

Haben zwei gegebene homologe Punkte P_1, P_2 der kollinearen Felder , η_2 in den polaren Feldern π, π' die nämliche Polare p, und sind r die Kollineation φ_{12} von η_1, η_2 die zueinander perspektiven Involunen $h(A_1^h A_i^h, B_1^h B_i^h, \ldots)$ und $H(a_1^H a_i^H, b_1^H b_i^H, \ldots)$ invariant, währd die Korrelationen χ_π, χ'_π von π, π' sie miteinander vertauschen, ist:

$$\varphi_{12} = \chi_\pi \cdot \chi'_\pi.$$

5. Nur eine einzige Kollineation Φ_{12} läßt sich bestimmen, die zwei gebene Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ t den windschiefen Trägern u, v in sich selbst überführt und zwei gegebene nkte P_1, P_2 einander zuweist[10]). Mit den Punktinvolutionen bleiben sie aus den Strahlen u, v wechselweise projizierenden Ebeneninvolunen $u(\alpha_1^u \alpha_i^u, \beta_1^u \beta_i^u, \ldots)$ und $v(\alpha_1^v \alpha_i^v, \beta_1^v \beta_i^v, \ldots)$ für Φ_{12} invariant. Die ppelelemente der beiden Punktinvolutionen sind die vier Ecken des cktetraeders der durch Φ_{12} kollinear aufeinander bezogenen Räume Σ_1, Σ_2, Doppelelemente der beiden Ebeneninvolutionen seine vier Ebenen. ese sowie jene können paarweise konjugiert imaginär sein. Sind Q_1, Q_2 ei weitere homologe Punkte von Σ_1, Σ_2, so erzeugen die homologen ıtrischen Bündel P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 die Ordnungskurven p_{12}^3, q_{12}^3 des zu , Σ_2 perspektiven tetraedralen Strahlenkomplexes $\mathfrak{S}_{12}^2$. Die Kurven liegen f einer einscharig in $\mathfrak{S}_{12}^2$ enthaltenen Regelfläche zweiter Ordnung. Die Komplexe gelegene Strahlenschar der Fläche besteht aus gemeinsamen sekanten von p_{12}^3 und q_{12}^3, die andere durch die Geraden $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ nende Strahlenschar $\mathfrak{R}^2$ aus gemeinsamen Unisekanten der Kurven. p_{12}^3 d q_{12}^3 sind zu $\mathfrak{R}^2$ perspektiv, also zueinander projektiv. Als projektive bische Raumkurven bestimmen sie zwei kollineare Räume Σ^p, Σ^q, in nen sie einander entsprechen. Die Kollineation Φ' dieser Räume läßt enfalls die Involutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$

[10]) Jolles, a. a. O., Nr. 20.

invariant, weist aber den Punkten P_1, P_2 bzw. die Punkte Q_1, Q_2 zu. Demnach können wir schließen:

Führt eine Kollineation Φ_{12} zwei gegebene Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ auf den windschiefen Trägern u, v in sich selbst über, und weist sie den Punkten P_1, Q_1 bzw. die Punkte P_2, Q_2 zu, so gibt es auch eine Kollineation Φ', die ebenfalls die beiden Involutionen invariant läßt, den Punkten P_1, P_2 bzw. aber die Punkte Q_1, Q_2 zuweist.

Hieraus folgt, wenn die gegebenen Punktinvolutionen hyperbolisch sind, der v. Staudtsche Satz:

Entsprechen in zwei kollinearen Räumen mit dem Decktetraeder $ABCD$ den gegebenen Punkten P_1, Q_1 bzw. die Punkte P_2, Q_2, so ist das Tetraeder $ABCD$ auch das Decktetraeder zweier kollinearen Räume, in denen den Punkten P_1, P_2 bzw. die Punkte Q_1, Q_2 entsprechen.

Nach dem oberen Satze verwandelt die Kollineation Φ' der Räume Σ^p, Σ^q die kollinearen Räume Σ_1, Σ_2 in sich selbst. Fallen die homologen Punkte Q_1, Q_2 von Σ_1, Σ_2 nacheinander mit allen anderen homologen Punkten der Räume zusammen, so fällt die Ordnungskurve q_{12}^3 des tetraedralen Komplexes $\mathfrak{S}_{12}^2$ mit jeder seiner Ordnungskurven zusammen. Die kollinearen Räume gehen dabei in alle kollinearen Räume über, für deren Kollineationen die Kollineation Φ_{12} invariant ist. Folglich ist dargetan:

Die Kollineationen, die zwei gegebene Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ auf den windschiefen Geraden u, v in sich selbst überführen, sind füreinander invariant.

Für diese Kollineationen ist auch der von den kollinearen Räumen Σ_1, Σ_2 erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{S}_{12}^2$ invariant, also ist gleichzeitig bewiesen:

Ein tetraedraler Strahlenkomplex wird durch die Kollineationen aller kollinearen Räume in sich selbst übergeführt, deren Decktetraeder mit seinem Haupttetraeder zusammenfällt; die Ecken des Tetraeders mögen reell oder paarweise konjugiert imaginär sein.

Alle ∞^3 kollinearen Räume, deren Kollineationen füreinander invariant sind, bilden einen Gebüschverband[11]; gleichgültig, ob das gemeinsame Decktetraeder reell ist oder konjugiert imaginäre Ecken hat.

6. Außer den beiden Räumen Σ_1, Σ_2, deren Kollineation Φ_{12} die Involutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ auf den windschiefen Geraden u, v invariant läßt, und die Punkte P_1, P_2 einander zuweist, sei der polare Raum Π gegeben, dessen Korrelation X_π

[11] Jolles, a. a. O., Nr. 20.

Involutionen mit den sie wechselweise aus u und v projizierenden eneninvolutionen $u(\alpha_1^u\alpha_i^u, \beta_1^u\beta_i^u, \ldots)$ und $v(\alpha_1^v\alpha_i^v, \beta_1^v\beta_i^v, \ldots)$ verscht und P_1 eine willkürlich gewählte Ebene π' zuordnet[12]). In Π d die Deckstrahlen u, v von Σ_1, Σ_2 reziproke Polaren und tragen eine Punkt- und eine Ebeneninvolution des polaren Raumes. r die Projektivitäten der von u getragenen Involutionen konjugierter emente von Π sind bzw. $u(A_1^uA_i^u, B_1^uB_i^u, \ldots)$ und $u(\alpha_1^u\alpha_i^u, \beta_1^u\beta_i^u, \ldots)$ variant, für die Projektivitäten der von v getragenen $v(A_1^vA_i^v, B_1^vB_i^v, \ldots)$ d $v(\alpha_1^v\alpha_i^v, \beta_1^v\beta_i^v, \ldots)$. Die Projektivitäten der von u getragenen Involionen konjugierter Elemente von Π kehren folglich bzw. die Projektität je zweier Punktreihen des durch $u(A_1^uA_i^u, B_1^uB_i^u, \ldots)$ gehenden schels projektiver Punktreihen und der je zweier Ebenenbüschel des rch $u(\alpha_1^u\alpha_i^u, \beta_1^u\beta_i^u, \ldots)$ gehenden Büschels projektiver Ebenenbüschel n[13]). Analoges gilt für die Projektivitäten der beiden von v getragenen Inlutionen konjugierter Elemente von Π. Je zwei projektive Punktreihen des rch $u(A_1^uA_i^u, B_1^uB_i^u, \ldots)$ gehenden Büschels führt also X_π in zwei projektive enenbüschel des durch $v(\alpha_1^v\alpha_i^v, \beta_1^v\beta_i^v, \ldots)$ gehenden Büschels über, und ese Ebenenbüschel schneiden u in zwei Punktreihen, deren Projektivität der jener Punktreihen invers ist. Wiederum gilt gleiches für v. Die mologen Punktreihen $u(A_1^u, \ldots)$, $u(A_2^u, \ldots)$ von Σ_1, Σ_2 auf u und e zu ihnen perspektiven homologen Ebenenbüschel $v(\alpha_1^v, \ldots)$, $v(\alpha_2^v, \ldots)$ n v verwandelt hiernach X_π in zwei projektive Ebenenbüschel von v d zwei zu ihnen perspektive nktreihen auf u, deren Protivitäten bzw. zu denen jener bilde invers sind. Einer anagen Transformation durch X_π terliegen die homologen Punkthen $v(A_1^v, \ldots)$, $v(A_2^v, \ldots)$ d die zu ihnen perspektin homologen Ebenenbüschel $\alpha_1^u, \ldots)$, $u(\alpha_2^u, \ldots)$ von $, \Sigma_2$.

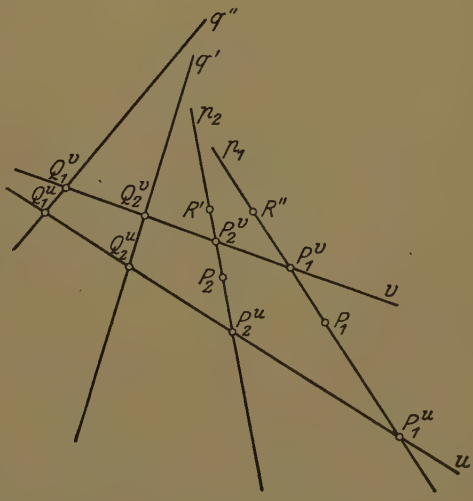

Fig. 3.

7. In den Räumen Σ_1, Σ_2, en Kollineation Φ_{12} die Involionen $u(A_1^uA_i^u, B_1^uB_i^u, \ldots)$ d $v(A_1^vA_i^v, B_1^vB_i^v, \ldots)$ auf n windschiefen Trägern u, v

[12]) Jolles, a. a. O., Nr. 26.
[13]) Jolles, a. a. O., Nr. 6.

invariant läßt und die Punkte P_1, P_2 einander zuweist, entsprechen einander die mit u, v und bzw. P_1, P_2 inzidenten Strahlen p_1, p_2 (Fig. 3). Sie treffen die Deckstrahlen u, v von Σ_1, Σ_2 in den homologen Punkten P_1^u, P_2^u und P_1^v, P_2^v. In dem polaren Raume Π, dessen Korrelation X_π jene Involutionen mit den sie wechselweise aus u, v projizierenden Ebeneninvolutionen vertauscht, und dem Punkte P_1 die Polarebene π' zuordnet, habe der Punkt P_2 die Polarebene π''. In π' liegt die Polare q' von p_1, in π'' die Polare q'' von p_2. Da in Π die Deckstrahlen u, v von Σ_1, Σ_2 reziprok polar und p_1, p_2 mit ihnen inzident sind, so sind es auch q', q''. Den Schnittpunkten Q_1^u, Q_1^v von q'' mit u und v entsprechen in den kollinearen Räumen Ξ_1, Ξ_2, in die Σ_1, Σ_2 durch X_π übergeführt werden, die Punkte Q_2^u, Q_2^v, die q' mit diesen Deckstrahlen gemein hat; q'', q' sind homologe Elemente von Ξ_1, Ξ_2, dagegen q', q'' von Σ_1, Σ_2 (6.). Ebenso entsprechen einander in Ξ_1, Ξ_2 die Strahlen p_2, p_1, die Punkte P_2^u, P_1^u und P_2^v, P_1^v, endlich die Punkte $\pi' p_2 = R'$ und $\pi'' p_1 = R''$ als Pole der homologen Ebenen $P_1 q'' = \varrho_1$ und $P_2 q' = \varrho_2$ von Σ_1, Σ_2. Der Punktwurf $p_2(P_2^u P_2^v R' P_2)$ ist nun projektiv zu dem von den Polarebenen $q''v$, $q''u$, ϱ_1, π'' seiner Punkte gebildeten Ebenenwurfe, dessen Achse q'' die Polare von p_2 in Π ist. Dieser Ebenenwurf wiederum ist perspektiv zum Punktwurfe $p_1(P_1^v P_1^u P_1 R'')$ und folglich projektiv zum Wurfe $p_1(P_1^u P_1^v R'' P_1)$. Somit besteht die Beziehung:

$$p_2(P_2^u P_2^v R' P_2) \wedge p_1(P_1^u P_1^v R'' P_1),$$

nach der, da P_2^u, P_1^u; P_2^v, P_1^v und R', R'' homologe Punkte der kollinearen Räume Ξ_1, Ξ_2 sind, sich auch P_2, P_1 als homologe Punkte dieser Räume erweisen. Wir haben sonach das Ergebnis:

Bleiben im Raume zwei gegebene Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ auf den windschiefen Geraden u, v für eine Kollineation Φ_{12} invariant, während eine polare Korrelation X_π sie mit den aus u, v sie wechselweise projizierenden Ebeneninvolutionen vertauscht, so kehrt die Korrelation X_π die Kollineation Φ_{12} um.

Aus diesem Satze folgt, wenn die gegebenen Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ hyperbolisch sind, wiederum ein v. Staudtscher Satz. Nämlich:

Enthält ein polarer Raum Π ein Polartetraeder $ABCD$ und die einander zugeordneten Elemente P_1, π_1 und P_2, π_2, so ist das Tetraeder $ABCD$ zugleich das Decktetraeder zweier kollinearen Räume Σ_1, Σ_2, in denen die Punkte P_1, P_2 und die Ebenen π_2, π_1 einander entsprechen.

Der von zwei kollinearen Räumen Σ_1, Σ_2 erzeugte tetraedrale Strahlenkomplex $\mathfrak{S}_{12}^2$ ist auch das Erzeugnis zweier kollinearen Räume Σ_1, Σ_{-2},

ren Kollineation zu der der Räume Σ_1, Σ_2 invers ist Somit liefert abgeleitete Hauptsatz außerdem das Ergebnis:

Ein tetraedraler Strahlenkomplex ist für die Korrelation jedes polaren Raumes invariant, der sein Haupttetraeder zum Polartetraeder hat; ichgültig, ob die Ecken des Tetraeders reell oder paarweise konjugiert aginär sind.

Alle polaren Räume Π, deren Korrelationen die Kollineation Φ_{12} kehren, bilden einen Gebüschverband[14]). Ihr gemeinsames Polartetraer ist das durch die Kollineation Φ_{12} bestimmte Decktetraeder. Seine ken sind entweder reell oder paarweise konjugiert imaginär.

8. Die Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ und $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ den windschiefen Geraden u, v mögen für die Kollineation Φ_{12} der ume Σ_1, Σ_2 invariant sein, hingegen durch die Korrelationen X_π, X'_π polaren Räume Π, Π' mit den sie aus u, v wechselweise projizierenn Ebeneninvolutionen vertauscht werden. Φ_{12} ist bestimmt, sobald Berdem zwei homologe Punkte P_1, P_2 von Σ_1, Σ_2 gegeben sind (**5.**), und X'_π, sobald in Π die Polarebene von P_1 und in Π' die Polarene von P_2 bekannt ist (**6.**). Fällt insbesondere die Polarebene von in Π mit der von P_2 in Π' zusammen, so lassen die Kollineationen und $\Phi = \mathsf{X}_\pi \cdot \mathsf{X}'_\pi$ nicht nur die Involutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ invariant, sondern weisen auch die Punkte P_1, P_2 ander zu. Beide Kollineationen sind also identisch, und es folgt:

Haben zwei gegebene Punkte P_1, P_2 der kollinearen Räume Σ_1, Σ_2 den polaren Räumen Π, Π' die nämliche Polarebene π, und sind für Kollineation Φ_{12} von Σ_1, Σ_2 die Punktinvolutionen $u(A_1^u A_i^u, B_1^u B_i^u, \ldots)$ $v(A_1^v A_i^v, B_1^v B_i^v, \ldots)$ auf den windschiefen Geraden u, v invariant, hrend die Korrelationen X_π, X'_π von Π, Π' sie mit den aus u, v sie chselweise projizierenden Ebeneninvolutionen $u(\alpha_1^u \alpha_i^u, \beta_1^u \beta_i^u, \ldots)$ und $\alpha_1^v \alpha_i^v, \beta_1^v \beta_i^v, \ldots)$ vertauschen, so ist:

$$\Phi_{12} = \mathsf{X}_\pi \cdot \mathsf{X}'_\pi.$$

Berlin-Halensee, 31. Januar 1920.

---

[14]) Jolles, a. a. O., Nr. 26.

(Eingegangen am 16. Februar 1920.

Summationsmethoden und Momentfolgen. II.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

In der vorangehenden, gleichbetitelten Arbeit, die wir als Note I zitieren, haben wir das System *vertauschbarer* linearer Substitutionen

$$A_p = \sum_m \lambda_{p,m} a_m \qquad \text{oder} \qquad A = \lambda a$$

betrachtet, deren Matrix

$$\lambda = \varrho^{-1} \mu \varrho$$

durch eine numerisch feste, aus Binomialkoeffizienten gebildete Matrix ϱ in eine willkürliche Diagonalmatrix μ überführbar ist. Wir ordnen jetzt jeder (geeigneten) Folge reeller Zahlen t_n eine Matrix ϱ und das entsprechende System $S(t_n)$ der Matrizen λ zu; das in Note I behandelte ist das System $S(n)$. Wenn die Elemente μ_n von μ die Momente

$$\mu_n = \mu(t_n), \qquad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u)$$

einer Funktion beschränkter Schwankung sind, ist λ eine C-Matrix, d. h. führt jede konvergente Folge a_m in eine konvergente Folge A_p über; und hiervon gilt unter gewissen Bedingungen auch die Umkehrung. In verschiedenen Systemen $S(t_n)$ entsprechen einander die zu gleichem $\chi(u)$ oder $\mu(t)$ gehörigen Matrizen; es gibt z. B. in jedem System Cesàrosche und Höldersche Matrizen, die bei gleicher Ordnung äquivalent sind, nebst Matrizen logarithmischen und exponentialen Charakters, die die Höldersche Skala ausfüllen und verstärken.

§ 1.

Interpolationsformeln.

Es sei t_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge *paarweise verschiedener* Zahlen,

$$\varphi_p(t) = (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_p), \tag{1}$$

eine beliebige Zahlenfolge,

$$f_p(t) = f\begin{pmatrix} t & \mu_0 \mu_1 \dots \mu_p \\ & t_0\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{p} \frac{\mu_m}{\varphi_p'(t_m)} \frac{\varphi_p(t)}{t - t_m}$$

s Polynom vom Grade $\leqq p$, das an den Stellen $t_0, \dots, t_p$ die Werte $\dots, \mu_p$ annimmt, und der Differenzenquotient

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \mu_1 \dots \mu_p \\ t_0\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{p} \frac{\mu_m}{\varphi_p'(t_m)}$$

n höchster Koeffizient. Da $f_p(t) - f_{p-1}(t)$ durch $\varphi_{p-1}(t)$ teilbar, also ich $\begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_p \\ t_0 \dots t_p \end{pmatrix} \varphi_{p-1}(t)$ ist, folgt

$$f_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_m \\ t_0 \dots t_m \end{pmatrix} (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{m-1})$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_m \\ t_0 \dots t_m \end{pmatrix} \varphi_{m-1}(t),$$

bei $\varphi_{-1}(t) = 1$, $f_0(t) = \mu_0$, $\begin{pmatrix} \mu_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \mu_0$ zu setzen ist. Verwendet man Wertpaare t_m, μ_m in umgekehrter Reihenfolge, so wird

$$f_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} (t - t_p)(t - t_{p-1}) \dots (t - t_{m+1})$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} \frac{\varphi_p(t)}{\varphi_m(t)}.$$

r setzen nun dauernd, für $m \leqq p$,

$$\lambda_{p,m} = \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} (t_0 - t_p)(t_0 - t_{p-1}) \dots (t_0 - t_{m+1})$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_m'(t_0)},$$

ziell

$$\lambda_{p,p} = \mu_p,$$

gegen, für $m > p$, $\lambda_{p,m} = 0$; die Matrix

$$\lambda = (\lambda_{p,m}) = \begin{pmatrix} \lambda_{0,0} & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & 0 & \dots \\ \lambda_{2,0} & \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

deren Betrachtung wir hinaus wollen, hängt außer von den μ_p nur

von den Differenzenverhältnissen der t_p ab und bleibt ungeändert, wenn man t_p durch $at_p + b$ $(a \neq 0)$ ersetzt.

Aus (5) folgt für $t = t_0$

$$\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = \mu_0. \tag{7}$$

Sei für den Augenblick $g_p(t) = f\begin{pmatrix} t & \mu_1 \dots \mu_{p+1} \\ t_1 & \dots t_{p+1} \end{pmatrix}$ in der obigen durch (2) erklärten Bedeutung. Aus

$$f_{p+1}(t) - f_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_{p+1} \\ t_0 \dots t_{p+1} \end{pmatrix}(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_p)$$

$$f_{p+1}(t) - g_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_{p+1} \\ t_0 \dots t_{p+1} \end{pmatrix}(t-t_1)\dots(t-t_p)(t-t_{p+1})$$

folgt

$$f_p(t) - g_p(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_{p+1} \\ t_0 \dots t_{p+1} \end{pmatrix}(t_0-t_{p+1})(t-t_1)\dots(t-t_p),$$

also für den Koeffizienten von t^p

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_p \\ t_0 \dots t_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_{p+1} \\ t_1 \dots t_{p+1} \end{pmatrix} = (t_0 - t_{p+1})\begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_{p+1} \\ t_0 \dots t_{p+1} \end{pmatrix},$$

mit anderer Bezeichnung

$$\begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} = (t_m - t_{p+1})\begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_{p+1} \\ t_m \dots t_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{m+1} \dots \mu_{p+1} \\ t_{m+1} \dots t_{p+1} \end{pmatrix}$$

und mit $(t_0 - t_{m+1})\dots(t_0 - t_p)(t_0 - t_{p+1})$ multipliziert:

$$(t_{p+1} - t_0)\lambda_{p,m} = (t_{p+1} - t_m)\lambda_{p+1,m} + (t_{m+1} - t_0)\lambda_{p+1,m+1}. \tag{8}$$

Dies nennen wir die *Rekursionsformel*; sie gilt allgemein, auch für $m > p$.

Sind die t_p reell, a die kleinste und b die größte unter den Zahlen $t_0, \dots, t_p$, und ist die reelle Funktion $\mu(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ stetig und für $a < t < b$ p-mal differenzierbar, so ist

$$\begin{pmatrix} \mu(t_0) & \mu(t_1) \dots \mu(t_p) \\ t_0 & t_1 \dots t_p \end{pmatrix} = \frac{1}{p!}\mu^{(p)}(t), \tag{9}$$

wie man durch wiederholte Anwendung des Rolleschen Satzes auf $f_p(t) - \mu(t)$ erkennt; t ist ein gewisser Wert zwischen a, b.

Wir haben diese bekannten Dinge zur Bequemlichkeit des Lesers und zur Einführung unserer Bezeichnungen hier zusammengestellt.

§ 2.

Total monotone Folgen.

Die reelle Folge μ_p heiße bezüglich der reellen Folge t_p *total monoton*, wenn stets

$$(-1)^{p-m}\begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad (0 \leqq m \leqq p) \tag{10}$$

es wird mit

) $$\lambda_{p,\,m} \geqq 0$$

ichbedeutend, falls $t_p > t_0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, wie wir künftig voraussetzen; ne Einbuße an Allgemeinheit kann

) $$t_0 = 0, \quad t_p > 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

genommen werden. Insbesondere ist $\lambda_{p,\,p} = \mu_p \geqq 0$; mit Ausschluß des lles $\mu_0 = 0$, wo alle $\lambda_{p,\,m}$ nach (7) verschwinden, werde $\mu_0 > 0$ voraus- etzt. Wir behaupten nun:

Satz I. *Wenn die Folge t_p den Bedingungen* (12) *genügt und μ_p üglich t_p total monoton ist, so existieren die Grenzwerte*

) $$l_m = \lim_p \lambda_{p,\,m};$$

nn $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{t_p}$ *divergiert, ist* $l_1 = l_2 = \ldots = 0$.

Denn aus der Rekursionsformel

) $$\lambda_{p,\,m} - \lambda_{p+1,\,m} = (t_{m+1}\lambda_{p+1,\,m+1} - t_m \lambda_{p+1,\,m}) : t_{p+1}$$

gt mit

) $$\Lambda_{p,\,m} = \lambda_{p,\,0} + \ldots + \lambda_{p,\,m}$$

) $$\Lambda_{p,\,m} - \Lambda_{p+1,\,m} = t_{m+1}\lambda_{p+1,\,m+1} : t_{p+1}.$$

ch (16) ist $\Lambda_{p,\,m} \geqq \Lambda_{p+1,\,m} \geqq 0$, also existiert $L_m = \lim_p \Lambda_{p,\,m}$ und glich auch $l_m = L_m - L_{m-1}$ $(l_0 = L_0)$. Ferner ist, ebenfalls nach (16), $\frac{\lambda_{p+1,\,m+1}}{t_{p+1}}$ konvergent, und wenn $\sum_p \frac{1}{t_{p+1}}$ divergiert, kann $\lim_p \lambda_{p+1,\,m+1}$ l_{m+1} nicht von 0 verschieden sein.

Nehmen wir an, daß t_p den Bedingungen

) $$\begin{cases} t_0 = 0, \quad t_p > 0 & (p \geqq 1) \\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{t_p} \text{ divergent}, \; t_p \to \infty \end{cases}$$

ügt (von denen die letzte an verschiedenen Stellen des Folgenden ge- dert werden könnte, vgl. Anm.[1])). Nach I ist dann in einer be- glich t_p total monotonen Folge *jedes Glied* μ_p $(p \geqq 1)$ sowie $\mu_0 - l_0$ *durch folgenden eindeutig bestimmt*, natürlich bei gegebenen t_p. Denn man bei Hervorhebung des Anfangsgliedes in (6)

$$\lambda_{p,\,m} = (-1)^{p-m} t_{m+1} \ldots t_p \left[\frac{\mu_m}{(t_m - t_{m+1}) \ldots (t_m - t_p)} + \ldots\right],$$

$$\lambda_{p,\,m}\left(1 - \frac{t_m}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t_m}{t_p}\right) = \mu_m + \ldots,$$

also für $p \to \infty$

$$0 = \lim [\mu_m + \dots] \qquad (m \geqq 1)$$

$$l_0 = \lim [\mu_0 + \dots]$$

was die Behauptung beweist.

§ 3.

Total monotone Funktionen.

Die für $t \geqq 0$ definierte reelle Funktion $\mu(t)$ heiße *total monoton*, wenn für irgend $p+1$ verschiedene Werte $t_0, t_1, \dots, t_p$ $(\geqq 0)$

$$(-1)^p \begin{pmatrix} \mu(t_0) & \mu(t_1) & \dots & \mu(t_p) \\ t_0 & t_1 & \dots & t_p \end{pmatrix} \geqq 0$$

oder, was dasselbe ist, wenn jede Folge $\mu(t_p)$ bezüglich t_p total monoton ist.

Satz II. *Wenn die Folge t_p den Bedingungen* (17) *genügt und μ_p bezüglich t_p total monoton ist, so gibt es eine und nur eine total monotone Funktion $\mu(t)$, für die $\mu(t_p) = \mu_p$.*

Zunächst kann es nur eine einzige solche geben. Denn ist $t > 0$ ein von den t_p verschiedener Wert mit $\mu(t) = \mu$, so ist die Folge $\mu_0, \mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ total monoton bezüglich der Folge $t_0, t, t_1, t_2, \dots$, die ebenfalls den Bedingungen (17) genügt, also μ durch $\mu_1, \mu_2, \dots$ eindeutig bestimmt (natürlich als Funktion von t).

Um andererseits eine Funktion $\mu(t)$ wirklich nachzuweisen, zeigen wir zuerst, daß die Interpolationsformel (4) sich auf *alle* Wertpaare der Folge ausdehnen läßt, d. h. daß

$$(18) \qquad f(t) = \lim f_p(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu_0 \dots \mu_m \\ t_0 \dots t_m \end{pmatrix} (t - t_0) \dots (t - t_{m-1})$$

für $t \geqq 0$ konvergiert[1]). Man hat für $p > n > 0$

---

[1]) Solche Reihen sind mehrfach untersucht worden, z. B. J. Bendixson, Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, Acta math., **9** (1887), S. 1–34; E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Münch. Ber. **36**, (1906), S. 151–221. Unser $f(t)$ ist übrigens für $\Re t > 0$ konvergent und regulär, wie aus leichter Umformung des obigen Konvergenzbeweises hervorgeht. Ersetzt man die letzte Bedingung (17) durch $\lim t_p = \tau > 0$, so liefert (18) eine für $0 \leqq t \leqq \tau$ total monotone, für $|t - \tau| < \tau$ reguläre Funktion; vgl. dazu S. Bernstein, Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d' une variable réelle, Math. Ann., **75** (1914), S. 449–468.

$$t) - f_n(t) = \sum_{m=n+1}^{p} \binom{\mu_0 \dots \mu_m}{t_0 \dots t_m} (t-t_0) \dots (t-t_{m-1})$$

$$= \sum_{m=n+1}^{p} \lambda_{m,0} \frac{(t_0-t)\dots(t_{m-1}-t)}{t_1 \dots t_m}$$

$$= -\left(1-\frac{t}{t_1}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_{n-1}}\right)\sum_{m=n+1}^{p}\lambda_{m,0}\left(1-\frac{t}{t_n}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_{m-1}}\right)\frac{t}{t_m}.$$

Ist $t>0$ und n so groß gewählt, daß $t<t_n, t_{n+1}, \dots$, so hat die zte Summe lauter nichtnegative Glieder und ist mit

$$\tau_m = \left(1-\frac{t}{t_n}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_{m-1}}\right)\left(1-\frac{t}{t_m}\right) \qquad (m \geqq n)$$

ich

$$\sum_{m=n+1}^{p}\lambda_{m,0}(\tau_{m-1}-\tau_m) \leqq \mu_0 \sum_{m=n+1}^{p}(\tau_{m-1}-\tau_m)$$
$$= \mu_0(\tau_n - \tau_p)$$
$$\leqq \mu_0\tau_n = \mu_0\left(1-\frac{t}{t_n}\right),$$

mit ihre Konvergenz für $p\to\infty$ und die von $f_p(t)$ nachgewiesen ist; erdies ist

9) $$|f(t)-f_n(t)| \leqq \mu_0\left|\left(1-\frac{t}{t_1}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_n}\right)\right|$$
(für $t<t_n, t_{n+1}, \dots$).

Um sodann $f(t)$ als total monoton nachzuweisen, verwenden wir die eite Darstellung (5)

0) $$f_p(t) = \sum_{m=0}^{p}\lambda_{p,m}\left(1-\frac{t}{t_{m+1}}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_p}\right).$$

Zerlegen wir $\sum_{m=0}^{p}$ in $\sum_{m=0}^{n-1}+\sum_{m=n}^{p}$; bei festem $n\geqq 1$ konvergiert $\sum_{m=0}^{n-1}$ für $\to\infty$ nach 0 oder l_0, je nachdem $t>0$ oder $t=0$, oder nach $l_0\cdot 0^t$, e wir mit ersichtlicher Verabredung sagen wollen. Demnach hat auch

$$g_p(t) = \sum_{m=n}^{p}\lambda_{p,m}\left(1-\frac{t}{t_{m+1}}\right)\dots\left(1-\frac{t}{t_p}\right)$$

$p\to\infty$ einen von n unabhängigen Grenzwert $g(t)=\lim_p g_p(t)$. Ist n $a>0$ und n so groß, daß $a<t_{n+1}, t_{n+2}, \dots$, so ist offenbar $g_p(t)$ Polynom in $a-t$ mit nichtnegativen Koeffizienten, woraus für $=0, 1, 2, \dots$

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g_p(t) \geqq 0 \qquad (t\leqq a)$$

folgt; mit Erinnerung an (9) ist also für $k+1$ verschiedene Werte $\tau_0, \ldots, \tau_k$ des Intervalls $0 \leqq t \leqq a$

$$(-1)^k \begin{pmatrix} g_\nu(\tau_0) & \cdots & g_\nu(\tau_k) \\ \tau_0 & \cdots & \tau_k \end{pmatrix} \geqq 0$$

und für $p \to \infty$

$$(-1)^k \begin{pmatrix} g(\tau_0) & \cdots & g(\tau_k) \\ \tau_0 & \cdots & \tau_k \end{pmatrix} \geqq 0,$$

d. h. $g(t)$ ist total monoton (für $0 \leqq t \leqq a$, d. h. für $t \geqq 0$). Da auch 0^t total monoton und $l_0 \geqq 0$, so ist $f(t) = l_0 \cdot 0^t + g(t)$ total monoton. Damit ist II bewiesen, die fragliche total monotone Funktion ist durch (18) gegeben.

§ 4.

Momentfunktionen.

Mit einer für $0 \leqq u \leqq 1$ monotonen, für wachsendes u nicht abnehmenden Funktion $\chi(u)$ bilden wir das Stieltjessche Integral

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \, d\chi(u) \qquad (t \geqq 0) \tag{21}$$

und nennen dies eine *Momentfunktion*. u^t ist hierbei als stetige Funktion von u gedacht, auch für $t = 0$, also $u^0 = 1$ auch für $u = 0$, so daß wie vorhin $0^t = \frac{0}{1}$ für $t \geqq 0$ zu setzen ist.

Für $t > 0$ ist $\mu(t)$ unbeschränkt differenzierbar mit

$$\mu^{(k)}(t) = \int_0^1 u^t (\log u)^k \, d\chi(u), \tag{22}$$

so daß $(-1)^k \mu^{(k)}(t) \geqq 0$; an der Stelle $t = 0$ ist die eventuelle Unstetigkeit von $\mu(t)$ dieselbe wie die von $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$, nämlich[2])

$$\mu(0) - \mu(+0) = \chi(+0) - \chi(0). \tag{23}$$

Für die Integralwerte sind die Werte von $\chi(u)$ an den Sprungstellen zwischen 0 und 1 und die Hinzufügung einer additiven Konstanten belanglos; wir präzisieren daher $\chi(u)$ durch die Anfangsbedingung $\chi(0) = 0$ und die Forderung des *arithmetischen Mittels*

$$\chi(u) = \tfrac{1}{2}\chi(u+0) + \tfrac{1}{2}\chi(u-0) \qquad (0 < u < 1)$$

und wir wollen sagen, daß $\chi(u)$ durch irgendwelche Vorschriften eindeutig bestimmt ist, wenn sie durch diese Vorschriften unter Hinzunahme der eben genannten eindeutig bestimmt ist.

---

[2]) Vgl. Note I, Formel (45). Auch das Integral (21) ist oft untersucht worden; es existiert und ist regulär jedenfalls für $\Re t > 0$.

Satz III. *Jede Momentfunktion ist total monoton, und jede total notone Funktion ist Momentfunktion einer eindeutig bestimmten mono-en Funktion* $\chi(u)$.

Ist die Momentfunktion $\mu(t)$ bei $t = 0$ stetig, so ergibt sich ihre ale Monotonie unmittelbar aus dem Vorzeichen der Ableitungen (22); sie unstetig, so ist sie gleich einer stetigen Momentfunktion plus $l_0 \cdot 0^t$, $l_0 > 0$ der Sprung (23) ist, also ebenfalls total monoton.

Sei umgekehrt $f(t)$ total monoton; dann ist die Folge $f(n)$ bezüglich total monoton, d. h. im Sinne der vorangehenden Note I schlechthin al monoton, denn für $t_n = n$ ist

$$\lambda_{p,m} = \binom{p}{m} \mu_{m,p-m} = \binom{p}{m} \sum_{n=0}^{p-m} (-1)^n \binom{p-m}{n} \mu_{m+n}.$$

Nach den dortigen Entwicklungen § 10, 11 gibt es also eine, ein-utig bestimmte, monotone Funktion $\chi(u)$ mit

$$f(n) = \int_0^1 u^n \, d\chi(u).$$

den wir mit ihr die Momentfunktion (21), so sind $f(t)$ und $\mu(t)$ beide al monotun und $\mu(n) = f(n)$, und da die Folge $t_n = n$ von der Art ') ist, so muß nach Satz II $\mu(t) = f(t)$ sein, womit III bewiesen ist.

Aus II und III folgt nun unmittelbar:

Satz IV. *Wenn die Folge* t_n *den Bedingungen* (17) *genügt und* μ_n *üglich* t_n *total monoton ist, so ist*

$$\mu_n = \int_0^1 u^{t_n} \, d\chi(u) \tag{1}$$

Momentfolge (mit den Exponenten t_n*) einer eindeutig bestimmten notonen Funktion* $\chi(u)$.

Umgekehrt ist natürlich jede Momentfolge (24) bezüglich der Ex-nentenfolge total monoton, auch wenn diese nur den Bedingungen (12) nügt.

Für den mit (24) gebildeten Grenzwert $l_0 = \lim \lambda_{p,0}$ folgt

$$l_0 = \mu(0) - \mu(+0) = \chi(+0) - \chi(0). \tag{5}$$

nn nennt man den Sprung (23) zunächst λ_0, so kann man so schließen:

Einerseits ist $\mu_0 - l_0$, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ noch eine total monotone Folge (die gehörigen λ sind $\lambda_{p,0} - l_0$, $\lambda_{p,m}$ für $m \geqq 1$, also nichtnegativ); sie gehört einer monotonen Funktion $\chi(u) - l_0 \operatorname{sg} u$ und diese macht an der Stelle $= 0$ den Sprung $\lambda_0 - l_0 \geqq 0$, oder auch: sie gehört zu einer total mono-

tonen Funktion $\mu(t) - l_0 \cdot 0^t$ und diese macht an der Stelle $t = 0$ den Sprung $\lambda_0 - l_0 \geqq 0$.

Andererseits ist $\chi(u) - \lambda_0 \operatorname{sg} u$ noch eine monotone (bei $u = 0$ stetige) Funktion; ihr entspricht eine total monotone Folge $\mu_0 - \lambda_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ und für diese ist der dem l_0 entsprechende Grenzwert $l_0 - \lambda_0 \geqq 0$. Zusammen ergibt dies: $l_0 = \lambda_0$.

§ 5.

Umformungen; Bestimmung von $\chi(u)$.

t_n genüge den Bedingungen (17) und μ_n sei bezüglich t_n total monoton, so daß (18) die zugehörige Momentfunktion darstellt. Betrachten wir insbesondere, bei festem u $(0 \leqq u \leqq 1)$, die Momentfunktion $\mu(t) = u^t$ (das zugehörige $\chi(u)$ macht an der Stelle u den Sprung 1 und ist sonst konstant); die zugehörigen $\lambda_{p,m}$ und $f_p(t)$ seien

$$\lambda_{p,m}(u) = (-1)^{p-m} t_{m+1} \ldots t_p \begin{pmatrix} u^{t_m} \ldots u^{t_p} \\ t_m \ldots t_p \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$f_p(t,u) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(u) \left(1 - \frac{t}{t_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \tag{27}$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \begin{pmatrix} u^{t_0} \ldots u^{t_m} \\ t_0 \ldots t_m \end{pmatrix} (t - t_0) \ldots (t - t_{m-1}).$$

Es ist also $\lim_p f_p(t,u) = u^t$, und aus (19)

$$|u^t - f_p(t,u)| \leqq \left|\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{t}{t_p}\right)\right|,$$

was für hinreichend großes p $(t < t_p, t_{p+1}, \ldots)$ gilt, schließen wir, daß diese Konvergenz, für gegebenes $t > 0$, in $0 \leqq u \leqq 1$ gleichmäßig ist, oder daß die Reihe

$$u^t = u^{t_0} + \begin{pmatrix} u^{t_0} u^{t_1} \\ t_0 \; t_1 \end{pmatrix} (t - t_0) + \begin{pmatrix} u^{t_0} u^{t_1} u^{t_2} \\ t_0 \; t_1 \; t_2 \end{pmatrix} (t - t_0)(t - t_1) + \ldots$$

bei gegebenem $t > 0$ in $0 \leqq u \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert (für $t = 0$ erhält man $1 = 1 + 0 + 0 + \ldots$). Es läßt sich also u^t, insbesondere $1, u, u^2, \ldots$ und daher jede in $[0,1]$ stetige Funktion $g(u)$ durch lineare Aggregate von $u^{t_0} (= 1), u^{t_1}, u^{t_2}, \ldots$ gleichmäßig approximieren[3]).

[3]) Ch. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstraß, Math. Abh., H. A. Schwarz gewidmet, Berlin 1914, S. 303–312; O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann., 77 (1916), S. 482–496. — Für $t_n = n$ wird $u^t = 1 - (1-u)\binom{t}{1} + (1-u)^2\binom{t}{2} - \ldots$ einfach die Binomialreihe für $[1-(1-u)]^t$.

Wir wollen noch die nach $\mu(t)$ konvergierenden Funktionen $f_p(t)$ ch andere, teilweise bequemere ersetzen. Sei zunächst (nur in diesem ragraphen, abweichend von (1))

$$\varphi_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{t_p}\right)}.$$

festem $t > 0$ sind diese Funktionen für alle p *in gleichem Grade ig* (également continues); denn für $t > h > 0$, $\alpha > 0$ ist

$$0 < e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t+h)} < e^{-\alpha t}\alpha h < \frac{h}{t},$$

$$0 < e^{-\alpha(t-h)} - e^{-\alpha t} < \frac{h}{t-h},$$

$$|\varphi_p(t \pm h) - \varphi_p(t)| \leqq \mu_0 \frac{h}{t-h}.$$

raus folgt, daß

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\lim}\, \varphi_p(t), \qquad \overline{\varphi}(t) = \overline{\lim}\, \varphi_p(t)$$

e, wie $\varphi_p(t)$, zwischen 0 und μ_0 liegen), für $t > 0$ stetig sind.

Allgemeiner sei

$$\Phi_p = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} \varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p,$$

in $\varepsilon_p = e^{-\tau_p : t_p}$ (wenigstens schließlich, so daß endlich viele $\varepsilon_p \leqq 0$ zu- assen werden) und $\tau_p \to t > 0$. Dann ist

$$\underline{\Phi} = \underline{\lim}\, \Phi_p = \underline{\varphi}(t), \qquad \overline{\Phi} = \overline{\lim}\, \Phi_p = \overline{\varphi}(t).$$

nn wählen wir, $t > h > 0$ gegeben, n so groß, daß für $p > n$ $\varepsilon_p = e^{-\tau_p : t_p}$ und τ_p zwischen $t \pm h$ liegt. Sei

$$\Phi_p^* = \sum_{m=n}^{p} \lambda_{p,m} \varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p, \qquad \varphi_p^*(t) = \sum_{m=n}^{p} \lambda_{p,m} e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{t_p}\right)}.$$

$- \Phi_p^*$ und $\varphi_p(t) - \varphi_p^*(t)$ konvergieren nach 0, ferner ist

$$\varphi_p^*(t+h) \leqq \Phi_p^* \leqq \varphi_p^*(t-h),$$

$$\underline{\varphi}(t+h) \leqq \underline{\Phi} \leqq \underline{\varphi}(t-h)$$

l. für $h \to 0$, $\underline{\Phi} = \underline{\varphi}(t)$, ebenso $\overline{\Phi} = \overline{\varphi}(t)$.

Wir bemerken noch folgende Abschätzung:

$$|\Phi_p - \Phi_p^*| \leqq \mu_0 \sum_{m=0}^{n-1} |\varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_p|$$

$$|\varphi_p(t) - \varphi_p^*(t)| \leqq \mu_0 \sum_{m=0}^{n-1} e^{-t\left(\frac{1}{t_{m+1}} + \ldots + \frac{1}{t_p}\right)}$$

$$|\Phi_p^* - \varphi_p^*(t)| \leqq \mu_0 \frac{h}{t-h}.$$

Wenn die ε_p nicht von den μ_n abhängen (sondern nur von den t_n und t), so kann man also, *von den μ_n unabhängig*, erst h so klein, dann das zugehörige n und dann p_0 so groß wählen, daß bei vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_p - \varphi_p(t)| < \mu_0 \varepsilon \qquad (p \geqq p_0) \tag{28}$$

Unter den Φ_p befindet sich, nach (20), insbesondere $f_p(t)$ mit $\varepsilon_p = 1 - \frac{t}{t_p}$, und da hier $\lim f_p(t) = \mu(t)$ existiert, so existiert allgemein $\Phi = \lim \Phi_p$ und $\varphi(t) = \lim \varphi_p(t)$, immer gleich $\mu(t)$. Ein anderes, für uns zweckmäßigeres Φ_p wird durch

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{1}{t_p}\right)^{-t},$$

also mit Einführung der Bezeichnung

$$D_p = d_0 + \ldots + d_p = \left(1 + \frac{1}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{t_p}\right) \qquad (D_0 = 1), \tag{29}$$

aus der umgekehrt

$$t_p = D_{p-1} : d_p \qquad (D_{-1} = 0) \tag{30}$$

folgt, durch

$$\Phi_p(t) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^t \tag{31}$$

erhalten; indessen könnte man allgemeiner

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right)^{-\frac{t}{\beta}} \qquad (\beta > 0)$$

$$\varepsilon_p = \left(1 + \frac{\beta_p}{t_p}\right)^{-t} \qquad (\beta_p > 0, \quad \beta_p \to 1)$$

u. dgl., also in (31)

$$D_p = \left[\left(1 + \frac{\beta}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

$$D_p = \left(1 + \frac{\beta_1}{t_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta_p}{t_p}\right)$$

u. dgl. setzen. Alle diese $\Phi_p(t)$ konvergieren nach $\mu(t)$ für $t > 0$, aber auch für $t = 0$.

Nimmt man wieder die Momentfunktion u^t, so wird aus (31)

$$\Phi_p(t, u) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(u) \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^t \tag{32}$$

d dies konvergiert nach u^t; aus (28) folgt, daß $\Phi_p(t,u) - f_p(t,u)$, bei gebenem $t > 0$, gleichmäßig in u nach Null und daher $\Phi_p(t,u)$ gleichmäßig ch u^t konvergiert. (Für $t = 0$ wird $\Phi_p(t,u) = 1$.) Hieraus erhält man, it Durchgang über Polynome in u, für jede in $[0,1]$ stetige Funktion $u)$ die gleichmäßig gültige Darstellung

$$g(u) = \lim_p \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(u)\, g\left(\frac{D_m}{D_p}\right) \tag{33}$$

d daher durch Integration

$$\int_0^1 g(u)\, d\chi(u) = \lim_p \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\, g\left(\frac{D_m}{D_p}\right). \tag{34}$$

as gibt eine, zu I § 11 analoge, Darstellung von $\chi(u)$ bei gegebenen omenten (24). Sei

$$\psi_p(u) = \sum_{D_m \leqq D_p u} \lambda_{p,m}$$

$$\underline{\psi}(u) = \varliminf \psi_p(u), \qquad \overline{\psi}(u) = \varlimsup \psi_p(u).$$

ählen wir, $0 \leqq \xi < \eta \leqq 1$ angenommen, die Funktion $g(u)$ gleich

$$1, \frac{\eta - u}{\eta - \xi}, 0 \text{ in den Intervallen } [0,\xi],\ [\xi,\eta],\ [\eta,1],$$

liegt die linke Seite von (34) zwischen $\chi(\xi)$ und $\chi(\eta)$, die Summe chts zwischen $\psi_p(\xi)$ und $\psi_p(\eta)$, also ihr Grenzwert zwischen $\underline{\psi}(\xi)$ und $\overline{\psi}(\eta)$, so daß wir

$$\chi(\xi) \leqq \underline{\psi}(\eta), \qquad \chi(\eta) \geqq \overline{\psi}(\xi)$$

halten. Hieraus leitet man leicht ab, daß alle drei monotonen Funktionen $u)$, $\underline{\psi}(u)$, $\overline{\psi}(u)$ dieselben Stetigkeitsstellen zwischen 0,1 und an ihnen eiche Werte

$$\chi(u) = \lim \psi_p(u) = \psi(u)$$

ben.

§ 6.

C-Matrizen und *C*-Folgen.

Zwischen zwei Zahlenfolgen a_n, b_n nehmen wir die Beziehung an — lem wir zur Bezeichnung (1) zurückkehren —

$$a_n = \varphi_n'(t_0)\begin{pmatrix} b_0 \dots b_n \\ t_0 \dots t_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{n} b_m \frac{\varphi_n'(t_0)}{\varphi_n'(t_m)}. \tag{35}$$

dann nach (4)

$$f\begin{pmatrix} t & b_0 \dots b_n \\ & t_0 \dots t_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\varphi_{m-1}(t)}{\varphi_m'(t_0)}$$

ist, so folgt

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi'_m(t_0)}. \tag{36}$$

Dieses Gleichungssystem schreiben wir in Matrizenform (vgl. hier und zum Folgenden den § 1 der vorigen Note)

$$b = \varrho a, \quad a = \varrho^{-1} b;$$

die Matrix ϱ hängt nur von den t_n, genauer von ihren Differenzenquotienten ab. Mit dieser festen Matrix ϱ und einer willkürlichen Diagonalmatrix μ bilden wir

$$\lambda = \varrho^{-1} \mu \varrho,$$

so daß die lineare Substitution $A = \lambda a$ vermöge der Hilfsmatrizen $b = \varrho a$, $B = \varrho A$ die rein multiplikative Form $B = \mu b$ $(B_n = \mu_n b_n)$ annimmt.

Diese Matrix λ ist nun mit der bisher betrachteten gleichen Namens identisch. Denn die Rechnung ergibt:

$$A_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi_p'(t_n)} \mu_n \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi'_m(t_0)} a_m$$

$$= \sum_{m=0}^{p} \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi'_m(t_0)} a_m \sum_{n=m}^{p} \frac{\varphi_{m-1}(t_n)}{\varphi_p'(t_n)} \mu_n ;$$

wo nun die innere Summe $= \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix}$, also

$$\lambda_{p,m} = \frac{\varphi_p'(t_0)}{\varphi'_m(t_0)} \begin{pmatrix} \mu_m \dots \mu_p \\ t_m \dots t_p \end{pmatrix}$$

ist, mit (6) übereinstimmend.

Ist λ eine (reine, normierte) C-Matrix, so heiße die Folge μ_n bezüglich der Folge t_n eine (reine, normierte) C-Folge. Für $t_n = n$ haben wir den in der vorangehenden Note ausführlich behandelten Spezialfall. Die Toeplitzschen Bedingungen für eine C-Matrix sind

$$(\alpha) \qquad \mathsf{M}_p = \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leqq \mathsf{M},$$

$$(\beta) \qquad l_m = \lim_p \lambda_{p,m} \text{ existiert.}$$

Die dritte Bedingung $\lim_p \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = l$ ist wegen (7) von selbst erfüllt. Den Bedingungen (α) (β) genügt nun, falls wieder (12) angenommen wird, nach Satz I jede bezüglich t_n total monotone Folge μ_n, insbesondere

e Momentfolge (24) einer monotonen Funktion $\chi(u)$; wenn überdies $\frac{1}{t_n}$ divergiert, ist $l_1 = l_2 = \ldots = 0$. Aus $a_m \to a$ folgt dann

$$A_\mu \to (\mu_0 - l_0)\alpha + l_0 a_0$$

wir erhalten eine reine C-Folge für $l_0 = 0$, d. h. wenn $\chi(u)$ an der lle $u = 0$ stetig ist; eine normierte C-Folge, wenn überdies $\mu_0 = 1$. überträgt sich unmittelbar auf Funktionen $\chi(u)$ von beschränkter wankung und gibt den

Satz V. *Wenn die Folge t_n den Bedingungen* (12) *genügt, so ist Momentfolge* (24) *einer Funktion $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung s eine C-Folge; falls* $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n}$ *divergiert und $\chi(u)$ bei $u = 0$ stetig ist, sie eine reine, falls $\mu_0 = 1$, eine normierte C-Folge.*

Bei festen t_n, also fester Matrix ϱ, haben wir das System $S(t_n)$ der rweise vertauschbaren Matrizen $\lambda = \varrho^{-1}\mu\varrho$, wo μ alle Diagonalmatrizen chläuft; in ihm werden durch

$$\mu_n = \mu(t_n), \quad \mu(t) = \int_0^1 u^t d\chi(u)$$

isse (unter Umständen alle, vgl. Satz VII) C-Matrizen geliefert. Anderer- s werden durch gleiche $\chi(u)$ oder $\mu(t)$ diese C-Matrizen verschiedener teme $S(t_n)$ einander zugeordnet, und wir können sie, genauere Be- hnung im Bedarfsfalle vorbehalten, so wie die C-Matrizen des speziellen tems $S(n)$ bezeichnen, also als Cesàrosche, Höldersche Matrizen usw.

Nehmen wir die Momentfunktion in der Form

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \varphi(u) du$$

Der Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

Spezialisierungen ($\beta = 1$ oder $\alpha = 1$ oder $\alpha = \beta = 1$) entsprechen die enden Momentfunktionen und normierten C-Matrizen:

$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(t+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(t+\alpha+\beta)}$	$C_{\alpha+\beta-1} : C_{\beta-1}$
$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+\alpha+1)}$	C_α
$\frac{\beta}{t+\beta}$	$\Gamma_\beta = C_\beta : C_{\beta-1}$
$\frac{1}{t+1}$	$\Gamma_1 = C_1 = C$

C_α ist die *Cesàrosche Matrix* der Ordnung α des Systems $S(t_n)$; die Ordnung kann übrigens > -1 angenommen werden, aber nur $\alpha \geqq 0$ gibt eine C-Matrix.

Für die Matrix $\lambda = \Gamma_\beta$ $(\beta > 0)$ ist, wie man leicht findet,

$$\lambda_{p,m} = \beta\, t_{m+1} \dots t_p : (t_m + \beta) \dots (t_p + \beta)$$

oder, wenn man

$$D_p(\beta) = \sum_{m=0}^{p} d_m(\beta) = \left(1 + \frac{\beta}{t_1}\right) \dots \left(1 + \frac{\beta}{t_p}\right) \qquad (D_0(\beta) = 1)$$

setzt:

$$\lambda_{p,m} = d_m(\beta) : D_p(\beta).$$

Im Fall $\beta = 1$ erhält man für die Matrix $\lambda = C$

$$\lambda_{p,m} = d_m : D_p$$

mit der Bezeichnung (29), die Substitution $A = Ca$ lautet also

$$A_p = (d_0 a_0 + \dots + d_p a_p) : D_p. \tag{37}$$

Auf den hierdurch hergestellten Zusammenhang unserer C_α mit den „typischen Mitteln" des Herrn M. Riesz[4]) werde ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen. *$S(t_n)$ ist das System der mit C vertauschbaren Matrizen.*

Will man eine *gegebene* Substitution (37) als $A = Ca$ in das zugehörige System einreihen, so hat man aus gegebener divergenter Reihe Σd_n die $t_p = D_{p-1} : d_p$ zu bestimmen; daß diese, wie bisher vorausgesetzt (vgl. aber § 8), paarweise verschieden ausfallen, kann man erreichen, indem man nötigenfalls (37) durch eine äquivalente Substitution gleicher Form ersetzt[5]).

Die Annahme

$$\varphi(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, u^{\beta-1} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

sodann mit $\beta = 1$ gibt die Momentfunktionen und normierten C-Matrizen

$$\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha \qquad \Gamma_\beta^\alpha$$

$$\left(\frac{1}{t+1}\right)^\alpha \qquad C^\alpha = H^\alpha$$

wobei α die Rolle eines Exponenten spielt und beliebig sein kann, aber nur $\alpha \geqq 0$ eine C-Matrix liefert. H^α ist die *Höldersche Matrix* der Ordnung α im System $S(t_n)$.

[4]) M. Riesz, Sur la sommation des séries de Dirichlet, Compt. rend. 5. Juli 1909; Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, ib. 22. Nov. 1909.

[5]) G. H. Hardy, On certain oscillating series, Quart. Journ., **38** (1907), S. 269–288; I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann., **74** (1913), S. 447–458, § 4.

Der Äquivalenzsatz $C_\alpha \approx H^\alpha$ $(\alpha > -1)$, darauf beruhend, daß

$$\mu(t) = \left(1+\frac{t}{\alpha}\right) : \left(1+\frac{t}{\beta}\right)$$

l

$$\mu(t) = \frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+\beta)} - (t+1)^{1-\beta}$$

$\alpha, \beta > 0$ Momentfunktionen sind (Note I, § 5, 6), überträgt sich unändert vom System $S(n)$ auf jedes andere, ebenso die Ausfüllung der ölderschen Skala zu einer logarithmischen und ihr Überbau durch rkere Exponentialskalen entsprechend den total monotonen Funktionen

$$\mu(t) = e^{-A(t+a)^\alpha} \quad (A > 0,\ a \geqq 0,\ 0 < \alpha < 1).$$

n hat in allen zum Spezialfall gehörigen Multiplikatorenfolgen μ_n einh n durch t_n zu ersetzen.

§ 7.

Identität von C-Folgen und Momentfolgen.

Satz VI. *Wenn* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, *so ist jede reelle, der Begung*

$$\mathsf{M}_p = \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leqq \mathsf{M}$$

ügende Folge μ_n *Differenz zweier total monotoner Folgen.*

Beweis. Die Rekursionsformel

$$t_{p+1}\lambda_{p,m} = (t_{p+1} - t_m)\lambda_{p+1,m} + t_{m+1}\lambda_{p+1,m+1}$$

hier $(m \leqq p)$ positive Koeffizienten. Drücken wir mittels wiederholter wendung $\lambda_{p,m}$ durch $\lambda_{p+2,m}$, $\lambda_{p+2,m+1}$, $\lambda_{p+2,m+2}$ aus usw., so kommt gemein

$$\lambda_{p,m} = \sum_{n} \binom{p\ m}{q\ n} \lambda_{q,n} \qquad (q \geqq p),$$

n die Werte $m, \ldots, m+q-p$ durchläuft und die Koeffizienten itiv sind, oder n die Werte $0, \ldots, q$ durchläuft und $\binom{p\ m}{q\ n} \geqq 0$.

Die aus (20) für $t = t_n$, $n \leqq p$ hervorgehende Formel

$$\mu_n = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\left(1-\frac{t_n}{t_{m+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{t_n}{t_p}\right),$$

man $\sum_{m=0}^{p}$ durch $\sum_{m=n}^{p}$ ersetzen kann, ist ein spezieller Fall dieser verallneinerten Rekursionsformel und zeigt überdies: da $\lambda_{p,0} \ldots \lambda_{p,p}$ durch

$\mu_0 \dots \mu_p$ und diese wieder durch jene linear homogen ausdrückbar sind, so sind $\lambda_{p,0} \dots \lambda_{p,p}$ ***linear unabhängig***, d. h. in jeder Relation $\sum_{m=0}^{p} c_m \lambda_{p,m} = 0$, wo die c_m Konstanten (von den μ_n unabhängig) sind, muß $c_0 = \dots = c_p = 0$ sein, und es können also darin die $\lambda_{p,m}$ durch beliebige Größen, insbesondere durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden.

Für $p \leqq q \leqq s$ folgt nun

$$\lambda_{p,m} = \sum_r \binom{p\,m}{s\,r} \lambda_{s,r} = \sum_{n,r} \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s\,r} \lambda_{s,r}$$

und demnach wegen der linearen Unabhängigkeit der $\lambda_{s,r}$ $(r = 0, 1, \dots, s)$

$$\sum_r \binom{p\,m}{s\,r} |\lambda_{s,r}| = \sum_{n,r} \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s\,r} |\lambda_{s,r}| \tag{38}$$

$$\geqq \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} \Big| \sum \binom{q\,n}{s\,r} \lambda_{s,r} \Big| = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}|,$$

d. h. die Ausdrücke

$$\binom{p\,m}{q} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}|$$

haben die Eigenschaft

$$\binom{p\,m}{q} \leqq \binom{p\,m}{s}$$

für $q \leqq s$.

Ferner war

$$\mu_0 = \sum_m \lambda_{p,m} = \sum_{m,n} \binom{p\,m}{q\,n} \lambda_{q,n} = \sum_n \lambda_{q,n},$$

woraus wir wieder auf

$$\sum_{m,n} \binom{p\,m}{q\,n} |\lambda_{q,n}| = \sum_n |\lambda_{q,n}|$$

oder

$$\sum_m \binom{p\,m}{q} = \mathsf{M}_q$$

schließen. Aus (α) folgt also, daß die mit wachsendem $q = p, p+1, \dots$ aufsteigenden Größen $\binom{p\,m}{q}$ beschränkt bleiben und folglich einen Grenzwert

$$l_{p,m} = \lim_q \binom{p\,m}{q} \geqq \binom{p\,m}{p} = |\lambda_{p,m}|$$

haben; aus (38) oder

$$\binom{p\,m}{s} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} \binom{q\,n}{s}$$

folgt dann für $s \to \infty$

$$l_{p,m} = \sum_n \binom{p\,m}{q\,n} l_{q,n},$$

o bestehen zwischen den $l_{p,m}$ dieselben Rekursionsformeln wie zwischen
$\lambda_{p,m}$ und es muß sich $l_{p,m}$ aus den $l_{n,n} = m_n$ ebenso bilden, wie
$_m$ aus den $\lambda_{n,n} = \mu_n$ (Gleichungen (6)). Nun war $l_{p,m} \geqq |\lambda_{p,m}|$, also
reellen μ_n

$$\lambda'_{p,m} = \tfrac{1}{2} l_{p,m} + \tfrac{1}{2} \lambda_{p,m} \geqq 0$$
$$\lambda''_{p,m} = \tfrac{1}{2} l_{p,m} - \tfrac{1}{2} \lambda_{p,m} \geqq 0$$

d $\lambda_{p,m} = \lambda'_{p,m} - \lambda''_{p,m}$, d. h. es ist $\mu_n = \mu'_n - \mu''_n$ Differenz total mono-
ner Folgen. Beiläufig sind μ'_n, μ''_n die kleinsten total monotonen Folgen
ser Art, d. h. jedes andere Paar entsteht hieraus durch Addition einer
d derselben willkürlichen, total monotonen Folge.

Aus IV und VI ergibt sich schließlich:

Satz VII. *Wenn die Folge t_n den Bedingungen* (17) *und $t_n < t_{n+1}$*
ügt, so ist jede zugehörige C-Folge die Momentfolge (24) *einer ein-*
utig bestimmten Funktion $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung.

Im Fall reeller μ_n liefert die zu $\mu_n = \mu'_n - \mu''_n$ gehörige Darstellung
$u) = \chi'(u) - \chi''(u)$ die kleinsten monotonen Funktionen dieser Art,
h. jedes andere Paar entsteht aus $\chi'(u)$, $\chi''(u)$ durch Addition einer
d derselben, willkürlichen, monotonen Funktion; demnach ist

$$\chi'(u) + \chi''(u) = \int_0^u |d\chi(u)|$$

totale Variation von $\chi(u)$ im Intervall $[0, u]$.

§ 8.

Verallgemeinerung.

Bisher hatten wir die t_n als paarweise verschieden angenommen; die
difikationen, die bei Preisgabe dieser Voraussetzung eintreten, mögen
ch kurz erwähnt und zwar durch *Grenzübergang* hergeleitet werden.
r fassen diejenigen Indizes $i < k < l < \ldots$, deren zugehörige t zusam-
nfallen sollen, mögen es endlich viele (eventuell nur einer) oder unend-
viele sein, zu einer *Gruppe* zusammen, die wir nach ihrem kleinsten
ement die Gruppe G_i nennen. Die Voraussetzung (12) bleibe bestehen,
daß G_0 nur den einen Index 0 enthält.

Statt der Zahlenfolgen μ_n, b_n, B_n führen wir neue ν_n, c_n, C_n ein, in-
n wir für jede Gruppe G_i setzen

$$\nu_i = \mu_i, \quad \nu_k = \lim \begin{pmatrix} \mu_i \mu_k \\ t_i\ t_k \end{pmatrix}, \quad \nu_l = \lim \begin{pmatrix} \mu_i \mu_k \mu_l \\ t_i\ t_k\ t_l \end{pmatrix}, \ldots$$
$$c_i = b_i, \quad c_k = \lim \begin{pmatrix} b_i b_k \\ t_i\ t_k \end{pmatrix}, \quad c_l = \lim \begin{pmatrix} b_i b_k b_l \\ t_i\ t_k\ t_l \end{pmatrix}, \ldots$$
$$C_i = B_i, \quad C_k = \lim \begin{pmatrix} B_i B_k \\ t_i\ t_k \end{pmatrix}, \quad C_l = \lim \begin{pmatrix} B_i B_k B_l \\ t_i\ t_k\ t_l \end{pmatrix}, \ldots$$

bei sich das Limeszeichen auf $t_k \to t_i$, $t_l \to t_i$, ... bezieht.

Die Formeln (36), worin wir m alle ganzen Zahlen $\geqq 0$ durchlaufen lassen können, da $\varphi_{m-1}(t_n)$ für $m > n$ verschwindet, geben dann

$$c_i = \sum_m a_m \frac{\varphi_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

$$c_k = \sum_m a_m \frac{\varphi'_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

$$c_l = \frac{1}{2!}\sum_m a_m \frac{\varphi''_{m-1}(t_i)}{\varphi'_m(t_0)}$$

. . . . . .

Diese, für jede Gruppe G_i aufzustellenden, Gleichungen drücken die c_n durch die a_m (und zwar c_n durch $a_0, a_1, \ldots, a_n$) aus; wir schreiben

$$c = \sigma a,$$

welche Matrizengleichung also an Stelle von $b = \varrho a$ tritt.

Die Umkehrung

$$a = \sigma^{-1} c$$

kann durch direkte Auflösung, oder durch Grenzübergang aus (35), gewonnen werden. Das Polynom $f\left(t\begin{smallmatrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{smallmatrix}\right)$ resp. sein Grenzwert ist nur jetzt nicht mehr durch die Lagrangesche, sondern durch die Hermitesche Interpolationsformel, nämlich durch die Forderung zu bestimmen, an vorgeschriebenen Stellen vorgeschriebene Werte und Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung zu besitzen. Wenn sich z. B. unter den Ziffern $0, \ldots, n$ die ersten drei Indizes i, k, l der Gruppe G_i befinden, so ist

$$f\left(t\begin{smallmatrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{smallmatrix}\right) \equiv b_i + \left(\begin{smallmatrix} b_i b_k \\ t_i t_k \end{smallmatrix}\right)(t - t_i) + \left(\begin{smallmatrix} b_i b_k b_l \\ t_i t_k t_l \end{smallmatrix}\right)(t - t_i)(t - t_k)$$

$\mathrm{mod}\,(t - t_i)(t - t_k)(t - t_l)$, also

$$\lim f\left(t\begin{smallmatrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{smallmatrix}\right) \equiv c_i + c_k(t - t_i) + c_l(t - t_i)^2$$

$\mathrm{mod}\,(t - t_i)^3$, d. h. unser Polynom hat an der Stelle t_i den Wert c_i und die ersten beiden Ableitungen c_k, $2!\,c_l$. Durch diese für jede Gruppe anzusetzenden Bedingungen ist das Polynom und sein höchster Koeffizient $\lim \left(\begin{smallmatrix} b_0 \ldots b_n \\ t_0 \ldots t_n \end{smallmatrix}\right) = a_n : \varphi'_n(t_0)$ bestimmt.

Ebenso ist

$$C = \sigma A, \qquad A = \sigma^{-1} C.$$

Um nun die Beziehungen $B_n = \mu_n b_n$ umzuformen, benutzen wir, etwa wieder für die ersten drei Indizes von G_i, die $\mathrm{mod}\,(t - t_i)(t - t_k)(t - t_l)$ gültige Kongruenz

$$f\left(t\begin{smallmatrix} B_i B_k B_l \\ t_i t_k t_l \end{smallmatrix}\right) \equiv f\left(t\begin{smallmatrix} \mu_i \mu_k \mu_l \\ t_i t_k t_l \end{smallmatrix}\right) f\left(t\begin{smallmatrix} b_i b_k b_l \\ t_i t_k t_l \end{smallmatrix}\right)$$

d erhalten durch Grenzübergang die Kongruenz mod $(t-t_i)^3$

$$C_i + C_k(t-t_i) + C_l(t-t_i)^2 \equiv [\nu_i + \nu_k(t-t_i) + \nu_l(t-t_i)^2] \times [c_i + c_k(t-t_i) + c_l(t-t_i)^2],$$

o

$$C_i = \nu_i c_i$$
$$C_k = \nu_k c_i + \nu_i c_k$$
$$C_l = \nu_l c_i + \nu_k c_k + \nu_i c_l$$
$$\dots$$

Diese, für jedes G_i anzusetzenden Gleichungen drücken die C_n durch e c_n aus; wir haben damit an Stelle von $B = \mu b$ die Matrizengleichung

$$C = \nu c,$$

ν aber keine Diagonalmatrix mehr ist, sondern in der angegebenen eise, den Indexgruppen oder *verschiedenen* t_i entsprechend, in Teilatrizen zerfällt.

Nunmehr ist $A = \lambda a$ mit

$$\lambda = \sigma^{-1} \nu \sigma,$$

obei die $\lambda_{p,m}$ auch aus (6) durch Grenzübergang (Hermitesche Interpolansformel) erhalten werden können. Bei festen t_n, variablen ν_n (oder ter Matrix σ, variabler ν) durchläuft λ ein System $S(t_n)$ vertauschbarer atrizen.

Ist $\chi(u)$ von beschränkter Schwankung, $\mu(t)$ die zugehörige Momentnktion (21) und setzt man für jede Gruppe G_i

$$\nu_i = \mu(t_i), \quad \nu_k = \mu'(t_i), \quad \nu_l = \frac{1}{2!}\mu''(t_i), \dots,$$

wird λ eine C-Matrix, insbesondere eine reine, falls $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n}$ divergiert d $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist.

(Eingegangen am 8. September 1920.)

Zusatz bei der Korrektur. Dem im Text gegebenen Beweise von 5), dessen erste Hälfte auf (17) beruht, ist ein anderer vorzuziehen, der ne die Annahme $t_n \to \infty$ auskommt und die aus (26) für $u > 0$ folgende rmel

$$\frac{d}{du}[u^{-t_m} \lambda_{p,m}(u)] = -t_{m+1} u^{-1-t_m} \lambda_{p,m+1}(u)$$

nutzt. Die Fassung des Satzes V, ohne die Voraussetzung $t_n \to \infty$, erhält t hierdurch ihre Rechtfertigung (d. 26. 11. 20).

Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung.

Von

Rudolf Rothe in Berlin.

Der Mittelwertsatz in seiner einfachsten Form lautet bekanntlich folgendermaßen:

Ist $f(x)$ für alle reellen Werte der Veränderlichen x im Innern des Bereiches $(x \ldots x+h)$ eindeutig und differenzierbar und an den Enden des Bereiches noch stetig, dann gibt es im Innern des Bereiches mindestens einen Argumentwert $\xi = x + \vartheta h$, wo $0 < \vartheta < 1$, derart, daß

$$(M_1) \qquad f(x+h) - f(x) = h f'(\xi).$$

Die Größe ϑ, von der man in der Regel nicht viel mehr weiß, als daß sie zwischen 0 und 1 gelegen ist, hängt im allgemeinen von den beiden Veränderlichen x und h ab. Die Nichtbeachtung dieses an sich selbstverständlichen Umstandes gehört zu den häufigsten Fehlschlüssen, und mancher Scheinbeweis des Taylorschen Satzes und anderer ist darauf zurückzuführen.

Nun gibt es aber Funktionen, z. B. $f(x) = e^x$, bei denen ϑ nicht von x abhängt, ja sogar, wie $f(x) = x^2$, bei denen ϑ überhaupt konstant ist.

Ich habe mir daher im folgenden die Aufgabe gestellt, alle den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes (M_1) genügenden Funktionen zu bestimmen, bei denen *entweder* ϑ einen von x und h ganz unabhängigen Wert hat, *oder* nur von h, aber nicht von x abhängig ist, *oder drittens* nur von x, aber nicht von h abhängt.

Diese Fragestellungen lassen sich verallgemeinern auf die Taylorsche Formel mit dem n-ten Restgliede in der Lagrangeschen Form und auf den Mittelwertsatz n-ter Ordnung, worunter ich die Formel verstehe, die aus (M_1) hervorgeht, wenn auf der linken Seite statt der ersten die n-te Differenz von $f(x)$ und auf der rechten entsprechend das Produkt aus h^n und der n-ten Ableitung $f^{(n)}(\xi)$ auftritt. Ich habe mich jedoch

diesen allgemeineren Fällen begnügt, die Annahme eines konstanten ertes von ϑ zu erledigen.

Die Ergebnisse sind überraschend einfach; die Beweise scheinen mir er keineswegs so leicht, als daß man die Fragestellungen als bloße ungsaufgaben zur Differentialrechnung betrachten könnte. Da ich ihnen der Literatur nicht begegnet bin, glaube ich, sie hier mitteilen zu dürfen.

Wenn $f(x)$ gegeben ist und die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes üllt, dann läßt sich aus der Formel (M_1) die zugehörige Funktion ξ Argumente x und h bestimmen, und damit natürlich auch $\vartheta(x, h)$. er umgekehrt ist nicht jede vorgegebene Funktion $\xi(x, h)$, selbst wenn im ganzen Intervall weitgehende Voraussetzungen der Stetigkeit und fferenzierbarkeit erfüllt, von der Beschaffenheit, daß sich zu ihr eine nktion $f(x)$ finden ließe, mit der zusammen sie die Formel (M_1) des ttelwertsatzes befriedigte. Ich habe zum Schluß die notwendigen und reichenden Bedingungen für eine Funktion ξ der genannten Beschaffen- t aufgestellt und gezeigt, wie man, wenn sie gegeben ist, die zugehörige nktion $f(x)$ zu bestimmen hat.

1. Es seien x und h $(\neq 0)$ reell, $a \leqq x \leqq b$ und auch $a \leqq x+h \leqq b$, ner $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ stetig, für $a < x < b$ differenzierbar, so gilt der ttelwertsatz (M_1) für den Bereich $(a \ldots b)$ und für jeden Teilbereich. (M_1) *werde jetzt ϑ als absolute Konstante, d. h. von x und von h abhängig, betrachtet.* Wenn x im Innern von $(a \ldots b)$ gelegen ist, ist linke und also auch die rechte Seite von (M_1) nach x differenzierbar, thin ist infolge der Konstanz von ϑ die Funktion $f(x)$ zweimal diffe- nzierbar. Durch beiderseitige Differentiation von (M_1) nach x und nach h ibt sich

$$\begin{cases} f'(x+h) - f'(x) = hf''(x+\vartheta h), \\ f'(x+h) \qquad\quad = hf''(x+\vartheta h)\cdot\vartheta + f'(x+\vartheta h). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar:

$$f'(x+h)(1-\vartheta) + \vartheta f'(x) = f'(x+\vartheta h).$$

Die nochmalige Differentiation nach h liefert weiter

$$f''(x+h)(1-\vartheta) = f''(x+\vartheta h)\cdot\vartheta.$$

Nun ist $f'(x)$ im Innern von $(a \ldots b)$ differenzierbar, also stetig, und h (1) ist folglich auch $f''(x)$ dort stetig. Demnach ergibt sich aus (2) $h \to 0$

$$f''(x)(1-2\vartheta) = 0.$$

Wäre nun $f''(x)$ identisch gleich Null, so wäre $f(x)$ linear, und die rmel (M_1) des Mittelwertsatzes für jeden beliebigen Wert von ϑ erfüll-

bar. Dieser triviale Fall soll hier, wie auch im folgenden, ausgeschlossen werden.

Es muß daher

$$\vartheta = \frac{1}{2}$$

sein.

Nunmehr ergibt sich aus (2)

$$f''(x+h) = f''\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Da h beliebige Werte annehmen darf, wofern nur $x + \frac{h}{2}$ und $x + h$ im Innern von $(a \ldots b)$ gelegen sind, so folgt daraus, daß $f''(x)$ eine von Null verschiedene Konstante, also

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha \neq 0)$$

mit konstanten α, β, γ sein muß.

Man überzeugt sich leicht, daß dieses $f(x)$ wirklich der Formel (M_1) mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ genügt.

Unter allen, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllenden Funktionen hat nur $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ die Eigenschaft, diesen Satz mit einem von x und h unabhängigen Wert von ϑ, nämlich $\vartheta = \frac{1}{2}$, zu befriedigen.

Die geometrische Bedeutung des Ergebnisses liegt auf der Hand: *Unter allen stetigen Kurven, die in jedem Punkte im Innern eines Bereiches $(a \ldots b)$ eine Tangente zulassen, hat allein die Parabel $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ die Eigenschaft, daß es zu jeder Sehne eine parallele Tangente gibt, deren Berührungspunkt, auf die Abszissenachse projiziert, die Strecke zwischen den Projektionen der Sehnenendpunkte immer in demselben Verhältnisse teilt, nämlich halbiert.*

2. In dem Mittelwertsatz (M_1) werde jetzt $\vartheta = \vartheta(h)$ als *von x unabhängig und nur von h abhängig* betrachtet. Es werde $\vartheta(h)$ *als eindeutig und differenzierbar angenommen*[1]; dann gilt dies auch für

$$h\,\vartheta(h) = \theta(h).$$

Zunächst folgt aus (M_1) durch dieselben Überlegungen wie vorher, daß weil ϑ von x nicht abhängt, $f''(x)$ und daher auch $f'''(x), \ldots$ für $a < x < b$ vorhanden ist. Durch Differentiation nach x und nach h ergibt sich aus (M_1)

$$(3) \qquad \begin{cases} f'(x+h) - f'(x) = h f''(x+\theta), \\ f'(x+h) \qquad\quad = f'(x+\theta) + h f''(x+\theta)\cdot\theta', \end{cases}$$

wo $\theta' = \frac{d\theta}{dh}$ gesetzt ist. Man kann annehmen, daß θ' nicht identisch verschwindet, denn sonst wäre θ konstant, und aus der vorstehenden Glei-

[1]) Vgl. hierzu den Nachtrag dieser Abhandlung.

ng würde sich auch $f'(x)$ als konstant ergeben, was auf den trivialen l der linearen Funktion führen würde. Demnach folgt aus den beiden ichungen durch Herausschaffen von $f''(x+\theta)$, wie leicht einzusehen,

$$f'(x+h)(1-\theta')+\theta' f'(x)=f'(x+\theta)$$

r

$$\theta'(f'(x+h)-f'(x))=f'(x+h)-f'(x+\theta).$$

n ist aber diese Gleichung stets nach θ' aufzulösen. Um dies zu beisen, bedenke man, daß θ' von x gänzlich unabhängig ist und nur von h ängt, und daß es also erlaubt ist, in dieser Gleichung für x irgendeen beliebigen Wert zu wählen, welchen Wert auch h haben mag, vorausetzt, daß nur x und $x+h$ im Bereiche $(a \ldots b)$ gelegen sind. Man nn nun aber zu jedem Wert von h solche Werte von x angeben, daß $x+h)-f'(x)\neq 0$ wird. Denn wäre $f'(x+h)-f'(x)=0$ erstens beliebige Werte von h und von x, so müßte $f'(x)$ im ganzen Beche konstant sein, was ausgeschlossen war. Wäre aber zweitens für en bestimmten Wert von h und beliebige Werte von x

$$f(x+h)=f'(x),$$

tte also $f'(x)$ die Periode h, so würde aus (4) folgen, daß auch

$$f'(x)=f'(x+\theta)=f'(x+\vartheta h)$$

re, d. h. $f'(x)$ auch die Periode ϑh hätte, die wegen $\vartheta<1$ kleiner h ist; indem man diese Überlegung wiederholt, würde man folgern, ß $f'(x)$ eine beliebig kleine Periode hätte, also konstant wäre. Hieraus ibt sich, daß in jedem Falle $f'(x+h)-f'(x)$ von Null verschieden Mithin läßt die Gleichung (4) eine Auflösung nach θ' zu:

$$\theta'=\frac{f'(x+h)-f'(x+\theta)}{f'(x+h)-f'(x)}.$$

e rechte Seite, die wie gesagt von x unabhängig ist, ist nach h differzierbar. Es existiert also θ''.

Nunmehr folgt aus (4) durch Differentiation nach h:

$$f''(x+h)(1-\theta')-\theta''(f'(x+h)-f'(x))=f''(x+\theta)\cdot\theta'$$

er unter Benutzung von (3)

$$f''(x+h)(1-\theta')-f''(x+\theta)(h\theta''+\theta')=0,$$

d daher weiter durch Differentiation nach x:

$$f'''(x+h)(1-\theta')-f'''(x+\theta)(h\theta''+\theta')=0.$$

Nun können aber, wie sofort ersichtlich, die Größen $1-\theta'$ und

$h\theta'' + \theta'$ nicht beide zugleich identisch Null sein. Es muß demnach die Determinante der beiden Gleichungen (5_1) und (5_2) verschwinden:

$$\begin{vmatrix} f''(x+h) & f''(x+\theta) \\ f'''(x+h) & f'''(x+\theta) \end{vmatrix} = 0.$$

Es kann aber $f''(x+\theta)$ nicht gleich Null sein, denn nach (3) müßte dann auch $f'(x+h) - f'(x)$ verschwinden, was der vorhergehenden Überlegung zufolge nicht zutrifft. Infolgedessen kann auch $f''(x+h)$ nicht gleich Null sein, wie ein Blick auf die Gleichung (5_1) lehrt. Mithin läßt sich die vorstehende Determinantengleichung in der Form schreiben:

$$\frac{f'''(x+h)}{f''(x+h)} = \frac{f'''(x+\theta)}{f''(x+\theta)}.$$

Da $\theta = \vartheta h$ wegen $\vartheta < 1$ nicht gleich h sein kann, so wird man

$$\theta = h + p(h)$$

setzen, wo $p(h) \neq 0$ ist. Dann geht die vorstehende Gleichung mit $x + h = z$ über in:

$$\frac{f'''(z)}{f''(z)} = \frac{f'''(z+p)}{f''(z+p)}. \tag{6}$$

Aber p kann keine absolute Konstante sein, sonst wäre nämlich $\theta' = 1$, $\theta'' = 0$ und daher nach (5_1) $f''(x+\theta) = f''(z+p) = 0$, was wieder auf den Fall der linearen Funktion führen würde. Also ist $p = p(h)$ veränderlich, und da θ differenzierbar, also gewiß stetig ist, so gilt dies auch für $p(h)$, und daher kann $p(h)$ alle Werte eines gewissen Bereiches annehmen. Das hat aber bezüglich der Gleichung (6) zur Folge, daß $f'''(z) : f''(z)$ konstant sein muß. Schreibt man statt z lieber x, so ist also

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)} = C,$$

worin C eine Konstante bedeutet. Aus dieser Gleichung läßt sich $f(x)$ leicht bestimmen.

Zunächst ergibt sich leicht

$$f'(x) = C f(x) + C_1 x + C_2,$$

unter C_1, C_2 Konstanten verstanden. Die Integration dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung liefert auf bekannte Weise

$$f(x) = C_3 e^{Cx} - \frac{C_1}{C}\left(x + \frac{1}{C}\right) - \frac{C_2}{C},$$

falls $C \neq 0$, und

$$f(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

falls $C = 0$ ist; C_3 bedeutet eine dritte Integrationskonstante.

Die quadratische Funktion $f(x)$ führt auf den in **1.** betrachteten Fall ick, wo ϑ von h unabhängig den Wert $\frac{1}{2}$ hat; dieser Fall ist also be- s erledigt.

Der Fall $C \neq 0$ liefert mit anderer Bezeichnung der Konstanten das ebnis

$$f(x) = ce^{\alpha x} + \beta x + \gamma \qquad (\alpha \neq 0).$$

n wird nun noch zu prüfen haben, ob diese Funktion $f(x)$ wirklich Mittelwertsatz mit $\vartheta = \vartheta(h)$ befriedigt. In der Tat ergibt sich durch setzen der vorstehenden Funktion $f(x)$ in die Formel (M_1):

$$e^{\alpha h} - 1 = \alpha h e^{\alpha \vartheta h}.$$

raus folgt

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha h} \cdot \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h};$$

st also von x nicht abhängig, sondern nur von h, und auch nicht stant.

Sonach gilt folgender Satz:

Unter allen, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllenden nktionen hat nur

$$f(x) = ce^{\alpha x} + \beta x + \gamma \qquad (\alpha \neq 0)$$

Eigenschaft, diesen Satz mit einem nicht von x, sondern nur von h ängigen nicht konstanten Werte von ϑ, nämlich

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha h} \cdot \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$$

befriedigen. Auch dieses Ergebnis läßt sich geometrisch deuten.

3. Es sei jetzt $\vartheta = \vartheta(x)$ *nur von x, dagegen nicht von h abhängig;* $= \frac{d\vartheta}{dx}$ *werde als vorhanden angenommen.* Die linke Seite der Gleichung

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) \qquad (\xi = x + \vartheta h)$$

für $h \neq 0$ und für jeden festen Wert von x im Bereiche $a < x < b$ bezug auf h stetig und differenzierbar, und da das Argument ξ als are Funktion von h für jeden festen Wert von x in bezug auf h eben- s stetig und differenzierbar ist, so gilt das gleiche für $f'(\xi)$, d. h. es $f''(x)$ im Innern des Bereiches $a < x < b$ vorhanden. Nunmehr ergibt Differentiation von (M_1) nach h und nach x die beiden Gleichungen

$$f'(x+h) = f'(x+\vartheta h) + hf''(x+\vartheta h) \cdot \vartheta,$$
$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x+\vartheta h) \cdot (1 + \vartheta' h).$$

s der ersten folgt wegen $0 < \vartheta$ sofort, daß für $h \neq 0$ auch $f''(\xi)$, n. $f''(x)$ für $a < x < b$ stetig ist. In der zweiten Gleichung kann der

Faktor von $f''(x+\vartheta h)$ nicht für jeden Wert von h verschwinden. Mithin läßt sich $f''(x+\vartheta h)$ eliminieren, und man erhält auf diese Weise

$$(1+\vartheta' h-\vartheta)f'(x+h)+\vartheta f'(x)=(1+\vartheta' h)f'(x+\vartheta h).$$

Die nochmalige Differentiation nach h liefert

$$\vartheta' f'(x+h)+(1+\vartheta' h-\vartheta)f''(x+h)=\vartheta' f'(x+\vartheta h)+(1+\vartheta' h)f''(x+\vartheta h)\cdot\vartheta.$$

Jetzt ist es zweckmäßig, h nach Null konvergieren zu lassen. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $f''(x)$

$$(1-\vartheta)f''(x)=f''(x)\vartheta,$$

und da das identische Verschwinden von $f''(x)$ wieder auf die lineare Funktion führen würde, so bleibt nur

$$\vartheta=\frac{1}{2}$$

übrig, d. h. es ergibt sich nichts anderes als der in **1.** besprochene Fall des konstanten ϑ. Sonach folgt der Satz:

Es gibt keine, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllende Funktion, für die dieser Satz mit einem nur von x, nicht von h abhängigen und nicht konstanten ϑ zu befriedigen wäre.

4. Zu diesen Ergebnissen sind noch einige Bemerkungen zu machen. Erstens ist der in den Resultaten von **1.** und **2.** auftretende lineare Anteil $\beta x+\gamma$ überflüssig. Denn wenn ganz allgemein der Mittelwertsatz (M_1) für eine Funktion $f(x)$ erfüllt ist, ist er es auch für die Funktion $f(x)+\beta x+\gamma$ und umgekehrt, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann. Zweitens kommt es auch weder auf die Maßeinheit von x, noch auf die von $f(x)$ an, d. h. auch $Cf(\alpha x)$, wo C, α Konstanten sind, genügt dem Mittelwertsatz. Um das einzusehen, braucht man in (M_1) nur αx statt x und zugleich αh statt h zu setzen, während der Faktor C von selbst herausfällt. Wenn daher der Mittelwertsatz für die Funktion $f(x)$ gültig ist, so genügt ihm auch die Funktion

$$Cf(\alpha x)+\beta x+\gamma$$

und umgekehrt. Demnach ist es ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt, $\beta=\gamma=0$ und $C=\alpha=1$ anzunehmen.

Dies vorausgeschickt, kann man jetzt die gefundenen Ergebnisse so aussprechen:

Der Mittelwertsatz wird für konstantes ϑ nur durch die Parabel $f(x)=x^2$ und nur mit $\vartheta=\frac{1}{2}$ erfüllt; für nicht konstantes $\vartheta=\vartheta(h)$ nur durch die Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ und nur mit $\vartheta=\frac{1}{h}\log\frac{e^h-1}{h}$; für nicht konstantes $\vartheta=\vartheta(x)$ durch keine Funktion.

5. Daß als konstanter Wert von ϑ gerade $\frac{1}{2}$ und kein anderer zulässig ist, überrascht zuerst. Aber dieser Wert ist derjenige, dem ϑ bei festgehaltenem x zustrebt, wenn h nach Null konvergiert. Ich habe eine entsprechende Aufgabe ohne Lösung, die sich auf den Taylorschen Satz bezieht, bei Laurent[2]) gefunden und vermute, daß das Ergebnis von Cauchy stammt. Man kann es einfach so beweisen:

$f(x)$ werde für $a < x < b$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt, $f''(x) \neq 0$. Dann gilt für $f(x)$ die Formel (M_1); aber diese Formel gilt auch für die Funktion $f'(x)$ wenigstens für jeden ganz im Innern von $(a \ldots b)$ enthaltenen Bereich und bleibt gültig, wenn man darin ϑh statt h schreibt. Es bestehen also zugleich folgende Gleichungen:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x + \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

$$f'(x+\vartheta h) - f'(x) = \vartheta h f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta_1 < 1).$$

Daher wird

$$\vartheta f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) = \frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x)}{h^2}.$$

Nach der Bernoulli-L'Hospitalschen Regel findet sich leicht der Grenzwert der rechten Seite bei festem x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x).$$

Da ferner $0 < \vartheta_1 \vartheta < 1$ beschränkt ist, so wird mit $h \to 0$ auch $\vartheta_1 \vartheta h \to 0$ und wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ bei festem x

$$\lim_{h \to 0} f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) = f''(x).$$

Daher ist $\lim_{h \to 0} \vartheta$ vorhanden und hat den Wert $\frac{1}{2}$, falls $f''(x) \neq 0$ ist, wie vorausgesetzt war.

Daß auch im Falle $\vartheta = \vartheta(h)$ für $h \to 0$

$$\lim \vartheta = \lim \left[\frac{1}{\alpha h} \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} \right] = \frac{1}{2}$$

wird, ist leicht zu zeigen.

6. Man kann die behandelten Fragestellungen verallgemeinern, indem man vom gewöhnlichen Mittelwertsatz zur *Taylorschen Formel mit Lagrangeschem Restglied* übergeht: $f(x)$ habe für $a \leqq x \leqq b$ stetige Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung einschließlich, und $f^{(n)}(x)$ sei noch für $a < x < b$ vorhanden, dann gilt für $a \leqq x \leqq b$ und $a \leqq x + h \leqq b$

$$(T) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

[2]) H. Laurent, Traité d'Analyse, Paris, Gauthier-Villars, 1885, I, S. 96.

wo

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Es werde nun die Frage behandelt: *Gibt es Funktionen $f(x)$, für die die Formel* (T) *durch ein konstantes ϑ befriedigt wird?*

Aus (T) folgt unmittelbar, daß R_n gewiß für solche Werte von x und von h nach jeder dieser beiden Veränderlichen differenzierbar ist, für die $a < x < b$ und $a < x + h < b$ gilt. Aus der Konstanz von ϑ schließt man weiter, daß $f^{(n+1)}(x)$ und daher alle folgenden Ableitungen von $f(x)$ im Innern des Bereiches $(a \ldots b)$ vorhanden und also auch stetig sind. Die Differentiationen nach x und nach h ergeben, mit $\xi = x + \vartheta h$,

$$f'(x+h) - f'(x) - \frac{h}{1!} f''(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) = \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

$$f'(x+h) - f'(x) - \frac{h}{1!} f''(x) - \ldots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x)$$

$$= \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \vartheta + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi).$$

Man kann daraus $f^{(n+1)}(\xi)$ entfernen und findet

$$\left[f'(x+h) - f'(x) - \frac{h}{1!} f''(x) - \ldots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x)\right](1 - \vartheta)$$

$$+ \vartheta \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi).$$

Jetzt differenziere man n-mal nach h, dann verschwindet auf der linken Seite die dort auftretende ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades von h, und man erhält

$$(7) \qquad f^{(n+1)}(x+h) \cdot (1 - \vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \left[h^{n-1} f^{(n)}(x + \vartheta h)\right].$$

Die rechte Seite wird nach der Leibnizschen Formel für die n-te Ableitung eines Produktes entwickelt. Dadurch entsteht eine Summe, in deren Summanden die Ableitungen von h^{n-1} vorkommen bis zur n-ten Ordnung einschließlich. Diese enthalten alle den Faktor h, ausgenommen die $(n-1)$-te, die den Wert $(n-1)!$ hat, und die n-te, die verschwindet. Man kann also schreiben

$$f^{(n+1)}(x+h) \cdot (1 - \vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\binom{n}{1} f^{(n+1)}(x + \vartheta h) \cdot \vartheta \cdot (n-1)! + (h)\right],$$

wo (h) ein Aggregat ist, das zugleich mit h nach Null konvergiert. Jetzt werde $h \to 0$ genommen; dann kommt

$$f^{(n+1)}(x) \cdot (1 - \vartheta) = n f^{(n+1)}(x) \cdot \vartheta.$$

Daher ist entweder $f^{(n+1)}(x) = 0$, d. h. $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades, wofür die Taylorsche Formel trivial wird und ϑ jeden beliebigen Wert annehmen kann, oder es ist

$$1 - \vartheta = n\vartheta,$$

d. h. *ϑ kann nur den konstanten Wert*

$$\vartheta = \frac{1}{n+1} \qquad (n > 0)$$

annehmen.

Um die zugehörigen Funktionen $f(x)$ zu gewinnen, werde die Gleichung (7) beiderseits nochmals nach h differenziert, so daß sich

$$f^{(n+2)}(x+h)\cdot(1-\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\binom{n+1}{2} f^{(n+2)}(x+\vartheta h)\cdot\vartheta^2(n-1)! + (h)\right]$$

ergibt. Der Grenzfall mit $h \to 0$ liefert jetzt

$$f^{(n+2)}(x)\cdot(1-\vartheta) = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} f^{(n+2)}(x)\cdot\vartheta^2$$

Die Einsetzung des Wertes $\vartheta = \frac{1}{n+1}$ führt zu

$$f^{(n+2)}(x) = 0;$$

$f(x)$ kann daher nur ein Polynom $(n+1)$-ten Grades $(n > 0)$ von x sein.

Man überzeugt sich auch leicht davon, daß jedes Polynom $(n+1)$-ten Grades den Taylorschen Satz mit dem n-ten Restgliede in der Lagrangeschen Form bei konstantem Werte $\vartheta = \frac{1}{n+1}$ befriedigt. Es genügt dazu ersichtlich, $f(x) = x^{n+1}$ zu wählen.

Das Ergebnis ist hier also das folgende:

Damit eine den Voraussetzungen des Taylorschen Satzes mit Lagrangeschem Restgliede n-ter Ordnung genügende Funktion diesen Satz mit einem konstanten Werte von ϑ befriedigt, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein Polynom $(n+1)$-ten Grades ist, und ϑ nimmt den Wert $\frac{1}{n+1}$ an.

7. Der Wert $\vartheta = \frac{1}{n+1}$ ist der Grenzwert, dem die Größe ϑ des Taylorschen Satzes zustrebt, wenn bei festem x sich h der Null nähert, vorausgesetzt, daß $f^{(n+1)}(x)$ für $a < x < b$ noch vorhanden und stetig ist, jedoch nicht identisch verschwindet. Dies beweist man genau entsprechend wie in **4.** beim Mittelwertsatze: Man wende die Formel (M_1) des gewöhnlichen Mittelwertsatzes auf die Funktion $f^{(n)}(x)$ an, die die

Voraussetzungen dieses Satzes gewiß für jedes ganz im Innern von $(a \dots b)$ enthaltene Intervall erfüllt; zugleich schreibe man ϑh statt ϑ. Dann ist

$$f^{(n)}(x+\vartheta h) = f^{(n)}(x) + \vartheta h f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 \vartheta h) \quad (0<\vartheta<1;\ 0<\vartheta_1<1).$$

Damit ergibt sich aus der Gleichung (T) für $h \neq 0$:

$$\frac{\vartheta}{n!} f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 \vartheta h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)}{h^{n+1}}.$$

Nun berechnet sich durch wiederholte Anwendung der Bernoulli-L'Hospitalschen Regel der Grenzwert der rechten Seite bei festgehaltenem Werte von x unschwer zu $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$. Für die linke Seite hat man zu bemerken, daß mit $h \to 0$ auch $\vartheta_1 \vartheta h \to 0$, und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f^{(n+1)}(x)$ bei festem x auch

$$f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 \vartheta h) \to f^{(n+1)}(x)$$

ist. Es existiert also gewiß $\lim_{h \to 0} \vartheta$, und man findet, falls $f^{(n+1)}(x) \neq 0$,

$$\lim_{h \to 0} \vartheta = \frac{1}{n+1}.$$

8. Der *Mittelwertsatz n-ter Ordnung* lautet: Ist, für $a \leqq x \leqq b$, $f^{(n-1)}(x)$ stetig und für $a < x < b$ differenzierbar, so gilt die Formel

$$(\mathrm{M}_n) \qquad \Delta^n f(x) = h^n \cdot f^{(n)}(x + n\vartheta h) \qquad (0<\vartheta<1)$$

für den Bereich $(a \dots b)$ und jeden in ihm enthaltenen Teilbereich. Darin bedeutet $\Delta^n f(x)$ die n-te Differenz

$$(\Delta) \qquad \Delta^n f(x) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(x + \overline{n-\mu}\, h).$$

Unter welchen Bedingungen ist in der Formel (M_n) *die Größe* ϑ *eine Konstante?*

Wegen der angenommenen Konstanz von ϑ folgt aus der Formel (M_n), daß im Innern von $(a \dots b)$ die $(n+1)$-te Ableitung von $f(x)$ und also auch die höheren Ableitungen vorhanden sind. Übrigens werde $f^{(n+1)}(x)$ als nicht identisch verschwindend angenommen. Denn wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle betrachteten Werte von x gleich Null ist, so bedeutet $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades, und für ein solches ist die Formel (M_n) des Mittelwertsatzes n-ter Ordnung trivial.

Für das Folgende ist es nützlich, einige nachher zu benutzende Hilfsformeln vorauszuschicken.

Setzt man zunächst in (Δ) $f(x) = x^n$ und bedenkt, daß $\Delta^n x^n = n!\, h^n$, so erhält man die bekannte Formel [3])

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (x + n - \mu h)^n = n!\, h^n.$$

Zur Vereinfachung setze man darin noch $n - \mu = \lambda$, $h = +1$, vertausche x mit $-x$, so wird

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^n = n!$$

Durch Integration nach x zwischen den Grenzen 0 und x ergibt sich hieraus die Beziehung

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^{n+1} - \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \lambda^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} = (n+1)!\, x.$$

Nimmt man hierin $x = n$ und vertauscht sodann in der zweiten Summe λ mit $n - \lambda$, so folgt nach einer einfachen Zwischenrechnung

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n - \lambda)^{n+1} = (n+1)! \frac{n}{2}$$

und daher auch

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \lambda^{n+1} = (-1)^n (n+1)! \frac{n}{2}.$$

Setzt man dies in die obige Beziehung ein, so ergibt sich leicht

$$\text{(b)} \qquad \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^{n+1} = (n+1)! \left(x - \frac{n}{2}\right).$$

9. Mit Hilfe der Formeln (a) und (b) ist es nun zunächst möglich, zu zeigen, daß auch im Falle des Mittelwertsatzes n-ter Ordnung der einzige konstante Wert, den ϑ annehmen kann, der Wert $\frac{1}{2}$ ist.

Zu dem Zweck werde auf die Formel (M_n) das folgende Verfahren angewendet. Man differenziere sowohl nach x wie auch nach h, wobei man zur Abkürzung

$$x + n\vartheta h = \xi,$$

$$(-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(x + \overline{n - \mu} h) = \varphi_\mu$$

setze, dann erhält man, mit φ'_μ, φ''_μ, ... die Ableitungen in bezug auf x bezeichnend,

[3]) E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig, Teubner, 1901, S. 249 (17).

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi'_\mu = h^n f^{(n+1)}(\xi),$$

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi'_\mu \cdot (n-\mu) = h^n f^{(n+1)}(\xi) \cdot n\vartheta + nh^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Aus beiden Gleichungen kann man $f^{(n+1)}(\xi)$ eliminieren. So entsteht

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi'_\mu \cdot (n-\mu-n\vartheta) = nh^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Auf diese Formel wende man dasselbe Verfahren des Differenzierens nach x und nach h und der darauffolgenden Elimination von $f^{(n+1)}(\xi)$ wiederum an, usf. Nach p-maliger Wiederholung ($p \leqq n$) erhält man

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi_\mu^{(p)} \cdot (n-\mu-n\vartheta)^p = n(n-1)\dots(n-p+1) h^{n-p} f^{(n}(\xi).$$

Durch Schluß von p auf $p+1$ kann man leicht die allgemeine Gültigkeit dieser Formel nachweisen.

Für $p = n$ folgt daraus

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi_\mu^{(n)} \cdot (n-\mu-n\vartheta)^n = n!\, f^{(n)}(\xi).$$

Die abermalige Differentiation nach x und h liefert zwei Gleichungen, aus denen sich jetzt leicht ergibt:

$$(*) \qquad \sum_{\mu=0}^{n} \varphi_\mu^{(n+1)} \cdot (n-\mu-n\vartheta)^{n+1} = 0.$$

Nun sei $h \to 0$; dann wird

$$\varphi_\mu^{(n+1)} \to (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x),$$

und, da $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung (*)

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n-\mu-n\vartheta)^{n+1} = 0.$$

Die Formel (b) ergibt aber für $x = n(1-\vartheta)$

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n-\mu-n\vartheta)^{n+1} = (n+1)! \left(\frac{n}{2} - n\vartheta\right).$$

Es muß also

$$\vartheta = \frac{1}{2}$$

sein, wie behauptet wurde.

10. Nachdem dies festgestellt ist, lautet jetzt die Formel (*) in **9.** ür $\vartheta = \frac{1}{2}$ folgendermaßen:

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x + \overline{n-\mu}\, h) \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} = 0 .$$

Eine solche Gleichung kann aber für unzählig viele Werte von x und h nur stattfinden, wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle Argumentwerte eine Konstante ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so würden zwischen den $(n+1)$ von Null verschiedenen Größen

$$(-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots n)$$

unzählig viele verschiedene lineare homogene Gleichungen bestehen können, was unmöglich ist. Ist aber $f^{(n+1)}(x)$ eine von Null verschiedene Konstante, dann sind alle diese Gleichungen mit der einen übereinstimmend

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} = 0 ,$$

und diese ist identisch erfüllt, wie sich sofort aus (b) für $x = \frac{n}{2}$ ergibt.

Da $f^{(n+1)}(x)$ eine nicht verschwindende Konstante ist, so folgt, daß $f(x)$ *ein Polynom $(n+1)$-ten Grades* sein muß. Man stellt leicht fest, daß auch wirklich ein beliebiges Polynom vom $(n+1)$-ten Grade den Mittelwertsatz n-ter Ordnung für ein konstantes ϑ, nämlich $\vartheta = \frac{1}{2}$, befriedigt. Dazu genügte es, $f(x) = x^{n+1}$ zu nehmen. Dann ist nämlich nach (Δ)

$$\Delta^n x^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} (x + n - \mu h)^{n+1} ;$$

aber aus (b) folgt, wenn man darin $\lambda = n - \mu$ setzt und $-\frac{x}{h}$ statt x schreibt

$$\sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} (x + n - \mu h)^{n+1} = (n+1)! \cdot h^n \left(x + \frac{n}{2} h\right) ;$$

demnach

$$\Delta^n x^{n+1} = (n+1)!\, h^n \left(x + \frac{n}{2} h\right) .$$

Die rechte Seite ist aber in der Tat gleich $h^n f^{(n)}(x + n\vartheta h)$ für $f(x) = x^{n+1}$ und $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Man kommt also hier zu folgendem Ergebnis: *Damit eine den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes n-ter Ordnung genügende Funktion diesen Satz mit einem konstanten Werte von ϑ befriedigt, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein Polynom $(n+1)$-ten Grades ist, und ϑ nimmt den Wert $\frac{1}{2}$ an.*

11. Die Formel (b) in **8.** kann auch zu dem Nachweise dienen, daß beim Mittelwertsatz n-ter Ordnung sich ebenfalls ϑ dem Grenzwerte $\frac{1}{2}$ nähert, wenn h nach Null konvergiert, vorausgesetzt, daß $f(x)$ im Innern des betrachteten Bereiches noch ein $(n+1)$-tes Mal stetig differenzierbar ist und $f^{(n+1)}(x)$ nicht identisch verschwindet. Dazu gehe man von der Formel (M_n) in **8.** aus und wende auf $f^{(n)}(x+n\vartheta h)$ den gewöhnlichen Mittelwertsatz an, dessen Voraussetzungen alle erfüllt sind:

$$f^{(n)}(x+n\vartheta h)=f^{(n)}(x)+n\vartheta h\cdot f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 n\vartheta h) \qquad \begin{pmatrix}0<\vartheta<1\\0<\vartheta_1<1\end{pmatrix}.$$

Aus dieser Formel und dem Mittelwertsatz n-ter Ordnung (M_n) mit Benutzung von (A) entsteht nunmehr

$$\frac{\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}f(x+\overline{n-\mu}h)-h^n f^{(n)}(x)}{h^{n+1}}=n\vartheta\cdot f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 n\vartheta h).$$

Was zunächst die rechte Seite dieser Formel betrifft, so ist wegen der Beschränktheit von $\vartheta_1\vartheta$ und der Stetigkeit von $f^{(n+1)}(x)$ für $h\to 0$

$$f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 n\vartheta h)\to f^{(n+1)}(x).$$

Die linke Seite wird nach $(n+1)$-maliger Differentiation von Zähler und Nenner in bezug auf h den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}f^{(n+1)}(x+\overline{n-\mu}h)\cdot(n-\mu)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}f^{(n+1)}(x)\cdot(n-\mu)^{n+1}$$

annehmen, also, der Formel (b) für $x=n$ zufolge, gleich dem von Null verschiedenen $f^{(n+1)}(x)$, multipliziert mit

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot(n+1)!\,\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$$

werden. Demnach ist, wie behauptet,

$$\lim_{h\to 0}\vartheta=\frac{1}{2}.$$

12. Ich kehre noch einmal zum einfachen Mittelwertsatze zurück. Die in **3.** bewiesene Tatsache, daß *keine* Funktion $f(x)$ vorhanden ist, die die Formel (M_1) des Mittelwertsatzes mit einem von $\frac{1}{2}$ verschiedenen konstanten Werte von ϑ, oder mit einem nur von x, nicht von h abhängigen und nicht konstanten $\vartheta=\vartheta(x)$ befriedigt, veranlaßt die Frage, *welchen Be-*

dingungen ϑ, als Funktion von x und h betrachtet, genügen muß, damit die Formel des Mittelwertsatzes durch eine Funktion $f(x)$ überhaupt erfüllt werden könne. Der triviale, bei beliebigem ϑ zu befriedigende Fall einer linearen Funktion $f(x)$ sei wieder ausgeschlossen.

Der Symmetrie des Ergebnisses zuliebe ist für das Folgende die Bezeichnungsweise und die Formulierung der Fragestellung ein wenig abgeändert worden.

Es sei ϑ eine auf den Wertbereich $0 < \vartheta < 1$ beschränkte Funktion der beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$, die das Innere des quadratischen Bereiches $a < x_1 < b, a < x_2 < b$ durchlaufen mögen. Die Funktion

$$\xi = \xi(x_1, x_2) = x_1 + \vartheta(x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1)$$

nimmt nur Werte des Bereiches $a < \xi < b$ an.

Es handelt sich dann um folgende Fragestellung:

Welchen Bedingungen muß ξ als Funktion von x_1, x_2 Genüge leisten, damit es eine Funktion $f(x)$ gebe, die für $a \leqq x \leqq b$ stetig, für $a < x < b$ differenzierbar ist und die Gleichung

$$(\mathrm{M}) \qquad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

befriedigt?

Zur Vereinfachung der mehr formalen Untersuchungen dieser und der folgenden Nummern mögen aus dem erwähnten quadratischen Bereiche des Paares x_1, x_2 die Punkte ausgeschlossen werden, die den im folgenden mit I. bis IV. bezeichneten Bedingungen nicht genügen. Der übrigbleibende Bereich werde mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Es sei

I. $x_1 \neq x_2$, d. h. $h = x_2 - x_1 \neq 0$.

II. Von der Funktion $\vartheta(x_1, x_2)$ werde vorausgesetzt, sie besitze für $a < x_1 < b$, $a < x_2 < b$ die stetigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \vartheta_1, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = \vartheta_2, \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1} = \vartheta_{12}, \quad \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_1} = \vartheta_{121}, \quad \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_2} = \vartheta_{122},$$

abgesehen von gewissen Punkten, die jedoch keinen zweidimensionalen Bereich erfüllen dürfen.

Man sieht sogleich, daß die Bedingung II. auch für die Funktion $\xi(x_1, x_2)$ erfüllt ist. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \xi_1$, $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \xi_2$ können nicht beide identisch verschwinden; denn sonst wäre ξ eine Konstante, daher auch $f'(\xi)$, und nach (M) würde $f(x)$ eine lineare Funktion sein, was ausgeschlossen war.

Nun ist die linke Seite von (M), also auch die rechte sowohl nach x_1 wie auch nach x_2 partiell differenzierbar, und weil nach II. ξ_1 und ξ_2 vorhanden sind, so existiert auch $f''(\xi)$:

$$f''(\xi) = \frac{\partial f'(\xi)}{\partial x_1} : \xi_1 = \frac{\partial f'(\xi)}{\partial x_2} : \xi_2,$$

vorausgesetzt, daß ξ_1 und ξ_2 beide nicht verschwinden. Unter dieser Voraussetzung folgt durch partielle Differentation aus (M)

$$(M') \qquad \begin{cases} f'(x_2) = (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_2 + f'(\xi), \\ -f'(x_1) = (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_1 - f'(\xi), \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich weiter wegen der Bedingung I.:

$$f''(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(\xi)}{(x_2 - x_1) \cdot \xi_2} = -\frac{f'(x_1) - f'(\xi)}{(x_2 - x_1) \cdot \xi_1}.$$

Es werde ausdrücklich angenommen, daß im Bereiche $\mathfrak{B}$

III. weder ξ_1 noch ξ_2 verschwinden.

Die gefundenen Ausdrücke für $f''(\xi)$ lassen nun ersichtlich partielle Ableitungen im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ zu, und wegen

$$f'''(\xi) = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial x_1} : \xi_1 = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial x_2} : \xi_2$$

ist also $f'''(\xi)$ im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ vorhanden. Nachdem dies festgestellt ist, folgt durch beiderseitige Differentiation der ersten Gleichung (M') nach x_1 oder der zweiten nach x_2:

$$(M'') \qquad (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_{12} + (x_2 - x_1) f'''(\xi) \cdot \xi_1 \xi_2 + f''(\xi) \cdot (\xi_1 - \xi_2) = 0,$$

wobei

$$\xi_{12} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}$$

gesetzt worden ist, entsprechend der Bedingung II.

Aus (M'') schließt man sofort, daß weder ξ_1 noch ξ_2 identisch verschwinden können, es sei denn, daß sie zugleich verschwänden; denn mit ξ_1 ist auch ξ_{12} identisch Null, und da $f''(\xi)$ nicht identisch verschwinden kann, müßte auch ξ_2 gleich Null sein. Nach dem oben Bemerkten war dies aber auszuschließen. Hieraus folgt, daß die Funktion ξ ihre beiden Argumente wirklich enthalten muß.

Es werde nun noch viertens angenommen, daß im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$

IV. $f''(\xi) \neq 0$

sei. An solchen Stellen, wo $f''(\xi) = 0$ wäre, müßte übrigens auch $f'''(\xi)$ verschwinden, und danach weiter auch alle noch vorhandenen höheren Ableitungen, wie sich aus (M'') leicht folgern läßt.

Diese Annahme erlaubt es, die Gleichung (M'') in der Form

$$(\alpha) \qquad \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = -\zeta$$

zu schreiben, wo ζ den Ausdruck

$$(\beta) \qquad \zeta = \frac{(x_2 - x_1)\xi_{12} + (\xi_1 - \xi_2)}{(x_2 - x_1)\xi_1 \xi_2}$$

bedeutet. Die Funktion $\zeta(x_1, x_2)$ existiert im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ und läßt dort ersichtlich partielle Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \zeta_1$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \zeta_2$ zu. Aus der Gleichung (α) folgt daher, daß in $\mathfrak{B}$ auch $f^{(4)}(\xi)$ existiert, und man erhält durch partielle Differentiation nach x_1 und nach x_2 und Elimination von $f^{(4)}(\xi)$ sofort

$$f''(\xi)(\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1) = 0,$$

also gewiß im Bereiche $\mathfrak{B}$, der Bedingung IV. zufolge,

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x_1 x_2)} = \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine *partielle Differentialgleichung dritter Ordnung dar, der ξ als Funktion der beiden Veränderlichen x_1, x_2 im Bereiche $\mathfrak{B}$ notwendigerweise zu genügen hat.* Wenn man die Eulersche Bezeichnung $\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = p$, $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = q, \ldots, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} = t$ anwendet, kann man diese Differentialgleichung leicht auf die Form

$$pq\left(p\frac{\partial t}{\partial x_1} - q\frac{\partial r}{\partial x_2}\right) - s(p^2 t - q^2 r) - \frac{q^3 r - pq(p+q)s + p^3 t}{x_2 - x_1} - pq\frac{p^2 - q^2}{(x_2 - x_1)^2} = 0$$

bringen.

Wenn also die Formel (M) des Mittelwertsatzes bestehen soll, so muß der Mittelwert ξ, als Funktion des Argumentenpaares x_1, x_2 betrachtet, in dem durch die Bedingungen I. bis IV. bestimmten Bereiche der Differentialgleichung (γ) Genüge leisten.

13. Es sei nun umgekehrt ξ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (γ). Man bilde daraus nach (β) die Funktion $\zeta(x_1, x_2)$. Zufolge (γ) muß ζ sich als Funktion des einen Argumentes ξ darstellen lassen, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß sie sich auch auf eine Konstante (einschließlich Null) reduzieren kann. Nach Bildung dieser Funktion $\zeta(\xi)$ bestimmt man die Funktion $f(\xi)$ aus der Gleichung (α), was stets durch Quadraturen möglich ist:

$$f(\xi) = C\int^{\xi} du \int^{u} dv\, e^{-\int^{v} \zeta(w)\, dw} + C_1 \xi + C_2,$$

worin C, C_1, C_2 Integrationskonstanten bedeuten. Man beobachtet, daß $f(\xi)$ bis auf eine lineare Funktion und einen konstanten Faktor, worauf es nach einer in **4.** gemachten Bemerkung nicht ankommt, vollständig bestimmt ist.

Diese Funktion, die man also in der Form

$$(\delta) \qquad f(x) = \int_{\alpha}^{x} du \int_{\beta}^{u} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \zeta(\xi)\, d\xi}$$

schreiben kann, ist aber nicht durch die gegebene Lösung ξ der Differentialgleichung (γ), sondern vielmehr durch die Funktion ζ des Arguments ξ bestimmt, die ihrerseits aus ξ durch Differentiationen erzeugt ist. Es ist daher durchaus nicht bewiesen, daß die Funktion $f(x)$ der Formel (δ) auch wirklich den Mittelwertsatz (M) mit der vorher gegebenen Funktion ξ von x_1, x_2 befriedigt, selbst wenn diese der Differentialgleichung (γ) gegenügt. Ich werde sogar nachher ein Beispiel des Gegenteils anführen. Die Differentialgleichung (γ) ist daher *zwar notwendig, jedoch noch nicht hinreichend* dafür, daß zu einer Funktion $\xi(x_1, x_2)$ eine dem Mittelwertsatz in der Form (M) genügende Funktion $f(x)$ existiert. Nun ist aber ersichtlich, daß wenn überhaupt eine zu einem gegebenen $\xi(x_1, x_2)$ gehörige, den Mittelwertsatz befriedigende Funktion $f(x)$ vorhanden ist, es nur die Funktion $f(x)$ der Formel (δ) sein kann. *Man braucht daher für diese Funktion $f(x)$ nur noch zu prüfen, ob die Formel des Mittelwertsatzes* (M) *selbst eine mit der gegebenen übereinstimmende Funktion $\xi(x_1, x_2)$ ergibt oder eine andere. Im ersten Falle läßt $\xi(x_1, x_2)$ eine den Mittelwertsatz erfüllende Funktion, nämlich $f(x)$, zu; im zweiten Falle gehört zu $\xi(x_1, x_2)$ überhaupt keine den Mittelwertsatz befriedigende Funktion $f(x)$.*

14. Der analytische Zusammenhang, aus dem ersichtlich ist, weshalb die Differentialgleichung (γ) keine hinreichende Bedingung für das Bestehen des Mittelwertsatzes darstellen kann, tritt durch die folgende Betrachtung noch klarer hervor. Man kann nämlich von der partiellen Differentialgleichung (γ) dritter Ordnung das *allgemeine Integral mit drei willkürlichen Funktionen* angeben.

Es ist identisch

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2}((x_2 - x_1) f'(\xi)) = f''(\xi)(x_2 - x_1)\xi_1 \xi_2 \cdot \left[\zeta + \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)}\right],$$

unter ζ den durch (β) definierten Ausdruck verstanden.

Ein erstes Integral der Differentialgleichung (γ) ist aber

$$(\zeta) \qquad \zeta = \varphi(\xi),$$

wo $\varphi(\xi)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ihres Argumentes bedeutet.

Bestimmt man nun eine Funktion $f(\xi)$ durch die Formel

$$(\eta) \qquad f(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} du \int_{\beta}^{u} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \varphi(t)\, dt},$$

unter α, β, γ irgendwelche Konstanten verstehend, dann ist

$$f'(\xi) = \int_{\beta}^{\xi} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \varphi(t)\,dt}$$

und ferner

$$\frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = -\varphi(\xi).$$

Die Formel (ζ) der ersten Integration geht demnach zufolge der Identität (ε) in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[(x_2 - x_1)\int_{\beta}^{\xi} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \varphi(t)\,dt}\right] = 0$$

über. Man kann daher eine zweite und dritte Integration ausführen und erhält

$$(\vartheta) \qquad (x_2 - x_1)\cdot\int_{\beta}^{\xi} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \varphi(t)\,dt} = X_2(x_2) - X_1(x_1),$$

worin X_1, X_2 beliebige differenzierbare Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Die durch diese Gleichung bestimmte Funktion $\xi(x_1, x_2)$ stellt *das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung* (γ) *dar.*

15. Aus der vorstehenden Formel ergibt sich nun unmittelbar, daß das *allgemeine* Integral (ϑ) den Mittelwertsatz nicht befriedigt. Denn die zugehörige Funktion $f(x)$ kann zufolge (η) keine andere sein als

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} du \int_{\beta}^{u} dv\, e^{-\int_{\gamma}^{v} \varphi(t)\,dt},$$

die linke Seite von (ϑ) lautet also $(x_2 - x_1) f'(\xi)$, und damit die Formel (ϑ) den Mittelwertsatz liefert, dürfen die Funktionen X_1 und X_2 nicht willkürlich bleiben, sondern müssen im Besondern so gewählt werden, daß

$$X_1(x) = X_2(x) = f(x)$$

wird. Nur unter dieser besonderen Annahme genügt die durch (ϑ) gegebene Lösung der Differentialgleichung (γ) in Verbindung mit der Funktion $f(x)$ auch dem Mittelwertsatze.

Es ist nicht schwer, die Funktion anzugeben, die für $x = x_1$ den Wert $f(x_1)$, für $x = x_2$ den Wert $f(x_2)$ annimmt, der Differentialgleichung

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)} + \varphi(x) = 0$$

genügt und die Formel des Mittelwertsatzes

$$(M) \qquad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

befriedigt, wo ξ einen Zwischenwert zwischen x_1 und x_2 bedeutet:

$$(f) \qquad f(x) = C \int_{x_1}^{x} du \int_{u_0}^{v} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw} - C \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^{u} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw} + \frac{(x - x_1) f(x_2) - (x - x_2) f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

hierin treten noch die drei willkürlichen Konstanten C, u_0, v_0 auf. Es bedarf nur eines Beweises für die letzte Behauptung. In der Tat wird

$$f'(x) = C \int_{u_0}^{x} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw} - \frac{C}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^{u} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw} + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

und dies stimmt für $x = \xi$ mit der Formel (M) überein, wenn ξ aus der Gleichung

$$\int_{u_0}^{\xi} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^{u} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw}$$

bestimmt wird. Daß hierin ξ einen Zwischenwert zwischen x_1 und x_2 bedeutet, ist klar; denn die vorstehende Formel ist nichts anderes als der Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewendet auf die im Intervall $x_1 < u < x_2$ stetige Funktion

$$\int_{u_0}^{u} dv\, e^{-\int_{v_0}^{v} \varphi(w)\, dw}.$$

16. Einige Beispiele mögen das soeben Gesagte näher erläutern. — Die Funktion

$$\xi = \sqrt[3]{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^3}$$

hat die partiellen Ableitungen

$$\xi_1 = \frac{x_2 + 2x_1}{6\xi}, \qquad \xi_2 = \frac{2x_2 + x_1}{6\xi}, \qquad \xi_{12} = \frac{1 - 6\xi_1 \xi_2}{6\xi}.$$

Damit wird nach (β)

$$\zeta = -\frac{1}{\xi};$$

die Differentialgleichung (γ) ist also erfüllt. Die zugehörige Funktion $f(x)$ bestimmt sich aus (δ) zu

$$f(x) = x^3,$$

wobei gleich das überflüssige Beiwerk des konstanten Faktors und des linearen Zusatzes weggelassen worden ist. Man überzeugt sich leicht, daß der Mittelwertsatz für dieses $f(x) = x^3$ und das obige ξ wirklich befriedigt wird.

17. Der in **1.** besprochene Fall des konstanten ϑ erledigt sich hier folgendermaßen. Es sei

$$\xi = x_1 + \vartheta \cdot (x_2 - x_1) \qquad (\vartheta \text{ konstant}).$$

Dann ist

$$\xi_1 = 1 - \vartheta, \quad \xi_2 = \vartheta, \quad \xi_{12} = 0,$$

also nach (β)

$$\zeta = \frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)\,\vartheta\,(1 - \vartheta)}.$$

Damit ergibt sich

$$\zeta_1 = \frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)^2\,\vartheta\,(1 - \vartheta)}, \qquad \zeta_2 = -\frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)^2\,\vartheta\,(1 - \vartheta)} = -\zeta_1.$$

Die Funktionaldeterminante (γ) wird

$$\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x_1, x_2)} = -(1 - \vartheta)\zeta_1 - \vartheta\zeta_1 = -\zeta_1$$

und verschwindet dann und nur dann, wenn

$$\vartheta = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\zeta = 0$$

ist. Daraus folgt nach (δ) unter Weglassung der überflüssigen Teile

$$f(x) = x^2,$$

in Übereinstimmung mit dem in **1.** gefundenen Ergebnis.

18. In dem in **2.** behandelten Falle ist ϑ eine Funktion von $h = x_2 - x_1$ allein; setzt man wie dort $h\vartheta = \theta$, so hängt auch θ allein von dem Argument $x_2 - x_1$ ab. Es wird

$$\xi = x_1 + \theta \qquad (\theta = \theta(h)),$$

daher

$$\xi_1 = 1 - \theta', \quad \xi_2 = \theta', \quad \xi_{12} = -\theta'',$$

und damit

$$\zeta = \frac{-(x_2 - x_1)\,\theta'' + 1 - 2\theta'}{(x_2 - x_1)\,\theta'(1 - \theta')}.$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß ζ eine Funktion des Argumentes $h = x_2 - x_1$ ist. Danach wird

$$\zeta_1 = -\frac{d\zeta}{dh}, \qquad \zeta_2 = +\frac{d\zeta}{dh}$$

und die Differentialgleichung (γ) reduziert sich auf

$$\frac{d\zeta}{dh} = 0.$$

Also ist ζ eine Konstante, die mit $-\alpha$ bezeichnet werden möge. Sie darf als nicht verschwindend betrachtet werden, denn der Fall $\zeta = 0$ ist soeben in **17.** erledigt worden. Die Gleichung (α) liefert nunmehr

$$\frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = \alpha$$

und daher

$$f(\xi) = ce^{\alpha\xi} + \beta\xi + \gamma,$$

oder wenn man von den Überflüssigkeiten im vorher erwähnten Sinne absieht,

$$f(x) = e^x.$$

Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich wie in **2**

$$(\dagger) \qquad \theta = \frac{1}{\alpha}\log\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h},$$

womit auch $\xi = x_1 + \theta$ bestimmt ist.

Dasselbe Resultat liefert die Formel (f) der Nummer **15.** Hierin hat man $\varphi(w) = -\alpha$ konstant zu nehmen und erhält nach Ausführung der Integrationen

$$f(x) = \frac{C}{\alpha^2}\left(e^{\alpha(x-v_0)} - \frac{(x-x_1)\,e^{\alpha(x_2-v_0)} - (x-x_2)\,e^{\alpha(x_1-v_0)}}{x_2-x_1}\right) + \frac{(x-x_1)f(x_2)-(x-x_2)f(x_1)}{x_2-x_1},$$

oder einfacher mit anderer Bezeichnung der Konstanten

$$f(x) = c\left(e^{\alpha x} - \frac{(x-x_1)\,e^{\alpha x_2} - (x-x_2)\,e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1}\right) + \frac{(x-x_1)f(x_2)-(x-x_2)f(x_1)}{x_2-x_1},$$

was natürlich bis auf einen linearen Anteil und bis auf die Maßstabseinheiten mit e^x übereinstimmt. Daraus folgt

$$f'(x) = c\left(\alpha e^{\alpha x} - \frac{e^{\alpha x_2} - e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1}\right) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

und der Mittelwertsatz ist für den Wert $x = \xi$ erfüllt, für den

$$\alpha e^{\alpha\xi} = \frac{e^{\alpha x_2} - e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1} = e^{\alpha x_1}\frac{e^{\alpha h}-1}{h}$$

oder

$$\xi - x_1 = \theta = \frac{1}{\alpha}\log\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}$$

ist, in Übereinstimmung mit der Formel (†).

19. Will man dagegen ξ aus der Differentialgleichung (γ) ermitteln, so bestimmt man wieder am besten zuerst θ, wozu hier die Gleichung $\zeta = -\alpha$ oder

$$(\dagger\dagger) \qquad \frac{-h\theta'' + 1 - 2\theta'}{h\theta'(1-\theta')} = -\alpha$$

zu benutzen ist. Man kann sie leicht auf die Form bringen:

$$\frac{(h\theta')'}{1+\alpha h\theta'} = 1-\theta',$$

und die Integration ergibt

$$1+\alpha h\theta' = A\,e^{\alpha h}\cdot e^{-\alpha\theta},$$

worin A eine willkürliche Konstante bedeutet. Schreibt man dieses Ergebnis in der Form

$$(h e^{\alpha\theta})' = A\,e^{\alpha h},$$

so findet man durch weitere Integration

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad e^{\alpha\theta} = \frac{A e^{\alpha h}+B}{\alpha h},$$

wo B eine zweite willkürliche Konstante bedeutet.

Durch Vergleich mit dem obigen, aus dem Mittelwertsatze gefundenen Werte $(\dagger)$ für θ zeigt sich, daß

$$A=1, \quad B=-1$$

sein muß. Für alle anderen Werte von A oder B stellt zwar die durch $(\dagger\dagger\dagger)$ definierte Funktion θ von $h=x_2-x_1$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\dagger\dagger)$, und entsprechend $\xi=x_1+\theta$ eine Lösung der Differentialgleichung (γ) dar, aber dazu gehört keine Funktion $f(x)$, die mit diesem ξ zusammen den Mittelwertsatz erfüllt. Dies ist ein einfaches Beispiel dafür, daß die Differentialgleichung (γ) nicht ausreicht, um die Brauchbarkeit einer gegebenen Funktion ξ für die Formel des Mittelwertsatzes festzustellen.

(Eingegangen am 7. Mai 1920.)

Nachtrag.

Mein Kollege Herr Hamel hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die in **2.** gemachte Voraussetzung der Differenzierbarkeit von $\vartheta(h)$ möglicherweise noch durch eine weitergehende ersetzt werden könnte. Dies trifft in der Tat zu. Es genügt nämlich, die *Existenz des Grenzwertes*

$$\lim_{\eta\to 0}\vartheta(h+\eta)$$

für alle zulässigen Werte von h *anzunehmen*, um daraus die Differenzierbarkeit von $\vartheta(h)$ zu folgern.

Aus (M_1) ergibt sich für $\theta = h\vartheta$ zunächst

a) $\quad f(x+h+\eta)-f(x+h) = (h+\eta)f'(x+\theta(h+\eta)) - hf'(x+\theta(h)),$

und da für $\eta \to 0$ die linke Seite nach Null konvergiert, so wird

$$\lim_{\eta \to 0} f'(x + \theta(h + \eta)) = f'(x + \theta(h)).$$

Nach der in 2. gemachten Bemerkung existiert aber $f''(x)$ und ist also $f'(x)$ stetig, und daher folgt weiter

$$(b) \qquad f'(x + \lim_{\eta \to 0} \theta(h + \eta)) = f'(x + \theta(h)),$$

worin der Limes der Voraussetzung zufolge vorhanden ist.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist die Funktion $f'(x)$ eindeutig umkehrbar, d. h. zu jedem Wert von $f'(x)$ gibt es nur einen Argumentwert x. Dann folgt sofort

$$\lim_{\eta \to 0} \theta(h + \eta) = \theta(h),$$

d. h. $\theta(h)$ und somit auch $\vartheta(h)$ ist *stetig*.

Andernfalls kann man

$$\lim_{\eta \to 0} \theta(h + \eta) = \theta(h) + q(h)$$

setzen, wo $q(h)$ nicht identisch verschwindet; es wird sich herausstellen, daß diese Annahme auf den trivialen Fall der linearen Funktion $f(x)$ führt. Schreibt man nämlich für $x + \theta$ wieder x, so folgt aus der Formel (b)

$$f'(x + q(h)) = f'(x).$$

Nun kann $q(h)$ mit variablem h entweder unzählig viele verschiedene Werte annehmen, woraus dann sofort $f'(x)$ konstant und $f(x)$ linear folgen würde. Oder $q(h)$ nimmt nur einen oder eine endliche Anzahl verschiedener Werte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ an; dann wäre $f'(x)$ periodisch mit den reellen Perioden $q_1, q_2, \ldots, q_n$, also entweder wieder überhaupt konstant, oder einfach periodisch mit einer Periode p, von der $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Vielfache sind. Aus

$$f'(x + p) = f'(x)$$

würde aber

$$f(x + p) = f(x) + C$$

mit konstantem C folgen. Für $h = p$ liefert die Formel (M_1) des Mittelwertsatzes

$$f(x + p) - f(x) = C = p f'(x + \theta(p));$$

mithin ist $f'(x + \theta(p))$ für jeden Wert von x im Bereiche $a < x < b$ konstant, demnach ebenso $f'(x)$, also $f(x)$ auch hier linear.

Auf diese Weise hat sich herausgestellt, daß, abgesehen von dem trivialen Fall der linearen Funktion, aus der Existenz von $\lim_{\eta \to 0} \vartheta(h + \eta)$

die Stetigkeit von $\vartheta(h)$ folgt. Nunmehr ist die Differenzierbarkeit von $\vartheta(h)$ leicht zu zeigen. Setzt man

$$\theta(h+\eta)=\theta(h)+\delta,$$

wo δ zugleich mit η nach Null konvergiert, so läßt sich die Gleichung a) in der Form

$$\frac{f(x+h+\eta)-f(x+h)}{\eta}=h\cdot\frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\eta}+f'(x+\theta+\delta)$$

schreiben. Für $\eta\to 0$ konvergiert die linke Seite nach $f'(x+h)$, das letzte Glied der rechten nach $f'(x+\theta)$; während

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\eta}=f''(x+\theta)$$

wird. Und da diese Größe gewiß nicht für unzählig viele Werte ihres Argumentes verschwindet, so ist

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\delta}{\eta}=\lim_{\eta\to 0}\frac{\theta(h+\eta)-\theta(h)}{\eta}=\frac{f'(x+h)-f'(x+\theta(h))}{hf''(x+\theta(h))}$$

vorhanden, w. z. b. w.

Eine ähnliche Betrachtung ließe sich übrigens auch bezüglich des in **3.** untersuchten Falles $\vartheta=\vartheta(x)$ anstellen, wo ebenfalls die dort angenommene Differenzierbarkeit dieser Funktion durch eine allgemeinere Voraussetzung ersetzt werden könnte.

(Eingegangen am 8. November 1920.)

Zwei philosophische Preisaufgaben.

Die neugegründete „Vereinigung der Freunde und Förderer des Positivistischen Idealismus“ (in der Richtung der Philosophie des Als-Ob) veröffentlicht soeben in ihrem Organ, den „Annalen der Philosophie“ 2, Heft 4, zwei Preisausschreiben.

Thema der ersten Preisaufgabe. *Die Rolle der Fiktionen in der Erkenntnistheorie von Friedrich Nietzsche.* Preis 3000 Mark. Preisrichter: Professor Dr. Bergmann, Privatdozent Dr. Brahn und Reichskommissar Bibliothekar Dr. Oehler (bekanntlich ein Verwandter des Philosophen Nietzsche), alle drei in Leipzig.

Thema der zweiten Preisaufgabe. *Das Verhältnis der Einsteinschen Relativitätslehre zur Philosophie der Gegenwart mit besonderer Rücksicht auf die Philosophie des Als-Ob.* Preis 5000 Mark. Preisrichter: Professor Dr. v. Aster in Gießen, Professor Dr. v. Laue in Berlin und Professor Dr. Schlick in Rostock. Die näheren Bestimmungen der Preisausschreiben erhalten die Interessenten kostenfrei zugesendet durch den Schriftleiter der „Annalen der Philosophie“ Dr. Raymund Schmidt in Leipzig, Fichtestraße 13. Derselbe ist auch Schriftführer der obengenannten neuen Philosophischen Gesellschaft, deren Programm unentgeltlich von ihm zu beziehen ist.